

# Resolução de Problemas de **Termodinâmica e Estrutura da Matéria**

**JOÃO VIEIRA** — n°79191 — [joaomiguelvieira@tecnico.ulisboa.pt](mailto:joaomiguelvieira@tecnico.ulisboa.pt)

Última atualização em 11 de Junho de 2016



# Conteúdo

|          |                                                          |           |
|----------|----------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>A estrutura conceptual da termodinâmica (série 1)</b> | <b>1</b>  |
| 1.1      | Resolução de exercícios . . . . .                        | 1         |
| 1.2      | Formulário . . . . .                                     | 11        |
| <b>2</b> | <b>O primeiro princípio da termodinâmica (série 2)</b>   | <b>13</b> |
| 2.1      | Resolução de exercícios . . . . .                        | 13        |
| 2.2      | Formulário . . . . .                                     | 25        |
| <b>3</b> | <b>O segundo princípio da termodinâmica (série 3)</b>    | <b>27</b> |
| 3.1      | Resolução de exercícios . . . . .                        | 27        |
| 3.2      | Formulário . . . . .                                     | 47        |
| <b>4</b> | <b>Física da estrutura da matéria (série 5)</b>          | <b>51</b> |
| 4.1      | Resolução de exercícios . . . . .                        | 51        |
| 4.2      | Formulário . . . . .                                     | 70        |
| <b>5</b> | <b>Exames de anos anteriores</b>                         | <b>73</b> |
| 5.1      | Exame de 5 de junho de 2012 . . . . .                    | 73        |
| 5.1.1    | Resolução sumária . . . . .                              | 74        |
| 5.2      | Exame de 18 de junho de 2014 . . . . .                   | 77        |
| 5.2.1    | Resolução sumária . . . . .                              | 78        |



# Nota inicial

Este documento consiste primeiramente na resolução das séries de problemas de Termodinâmica e Estrutura da Matéria para o Mestrado em Engenharia Electrotécnica e Computadores, disponibilizadas na [página alternativa da mesma cadeira](#), no segundo semestre do ano letivo 2014/2015.

A presente resolução foi concebida para ser o mais detalhada possível, e para além das séries resolvidas inclui também alguns formulários didáticos e a resolução de alguns exames de anos anteriores do professor Rui Dilão. As resoluções sucintas apresentadas também são da autoria do professor Rui Dilão, que generosamente as disponibilizou para que pudessem integrar este documento.

Todas as resoluções de exercícios deste documento foram realizadas pelo aluno João Miguel Vieira de MEEC, algumas delas baseadas nas resoluções das aulas práticas lecionadas pelo professor João Pedro Bizarro. Por fim, todo o documento contou com a revisão científica do professor Rui Dilão.

Nunca é demais referir que esta coletânea pode conter erros ou gralhas. Se forem detetados erros pede-se que seja enviado um e-mail para o endereço na capa deste documento de forma a que, numa próxima versão, as gralhas sejam corrigidas.

Espero que estas resoluções vos sejam úteis e bom estudo.

João Miguel Morgado Pereira Vieira  
16 de fevereiro de 2016

## **Exercícios corrigidos:**

- Exercício 1 na página 13 [colaboração de Mário Vieira];
- Exercício 18 na página 8 [colaboração de João Ferreira].



# Capítulo 1

## A estrutura conceptual da termodinâmica (série 1)

### 1.1 Resolução de exercícios

1. A temperatura de ebulição do azoto é de  $-195.81^{\circ}\text{C}$ . Calcule esta temperatura em graus **fahrenheit** e em **kelvin**.

#### Resolução

Utilizando as expressões 1.1 e 1.3 do formulário vem que

$$T_{E_{N_2}} = -195.81^{\circ}\text{C} = 77.34\text{ K} = -320.46^{\circ}\text{F}.$$

2. Em graus **celsius**, a temperatura do corpo humano é de  $36.5^{\circ}\text{C}$ . Quanto é esta temperatura em graus **fahrenheit**?

#### Resolução

Utilizando novamente a fórmula 1.1 do formulário vem que

$$T_{CH} = 36.5^{\circ}\text{C} = 97.7^{\circ}\text{F}.$$

3. Nas quedas de água, a temperatura da água na base é superior à temperatura da água no topo. Numa queda de água com **10 m** de altura, determine a variação de temperatura da água. A aceleração da gravidade é  **$g = 9.8\text{ m s}^{-2}$** .

O calor específico da água está tabelado e é  $c = 4181\text{ J kg}^{-1}\text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$ .

**Resolução**

Nestas condições, pode-se considerar que não há variação da energia interna:  $\Delta U = 0$ . Desta forma, em módulo, a variação da energia potencial tem de igualar a variação do calor interno do sistema e portanto:

$$\Delta E_P = \Delta Q \Leftrightarrow mg\Delta h = mc\Delta T \Leftrightarrow \Delta T = \frac{g\Delta h}{c} = \frac{9.8 \times 10}{4181} \approx 2 \times 10^{-2} \text{ } ^\circ\text{C}$$

onde  $m$  é a massa de água e  $c$  o seu calor específico.

4. Um pedaço de metal com **0.05 kg** é aquecido até à temperatura de **200 °C** e depois é mergulhado num recipiente com **0.5 l** de água à temperatura de **20 °C**. Quando o metal e a água atingem o equilíbrio térmico, a temperatura da água é de **22.6 °C**. Determine o **calor específico do metal**.

Note-se que, para temperaturas normais ( $0^\circ\text{C} < T < 100^\circ\text{C}$ ) a densidade da água é  $\rho = 1 \text{ kg dm}^{-3}$ .

**Resolução**

Sabe-se que, não havendo variação da energia interna do sistema água + metal,  $\Delta Q_{\text{água}} + \Delta Q_{\text{metal}} = 0$ , portanto:

$$\begin{aligned} m_{\text{água}}c_{\text{água}}\Delta T_{\text{água}} &= -m_{\text{metal}}c_{\text{metal}}\Delta T_{\text{metal}} \\ 0.5 \times 4181 \times (22.6 - 20) &= -0.05 \times c_{\text{metal}} \times (22.6 - 200) \\ c_{\text{metal}} &= 613 \text{ J kg}^{-1} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}. \end{aligned}$$

5. Um recipiente de **Alumínio** contém **100 g** de **água** à temperatura de **10 °C**. A massa do recipiente é  **$m_{\text{alumínio}} = 300 \text{ g}$** . Calcule a **temperatura do sistema água mais recipiente** depois de se adicionar **100 g** de água à temperatura de **100 °C**.

O calor específico do alumínio está tabelado e é  $c = 900 \text{ J kg}^{-1} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ .

**Resolução**

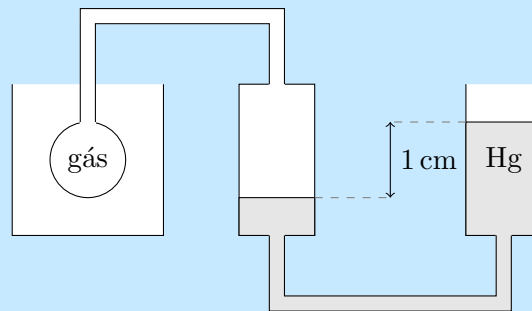
Fazendo um balanço de calor, análogo ao que foi feito no exercício anterior, obtém-se:

$$\begin{aligned} \Delta Q_{\text{água}_1} + \Delta Q_{\text{água}_2} + \Delta Q_{\text{alumínio}} &= 0 \\ m_{\text{água}}c_{\text{água}}(\Delta T_{\text{água}_1} + \Delta T_{\text{água}_2}) + m_{\text{alumínio}}c_{\text{alumínio}}\Delta T_{\text{alumínio}} &= 0 \\ m_{\text{água}}c_{\text{água}}(2T_{\text{equilíbrio}} - 110) + m_{\text{alumínio}}c_{\text{alumínio}}(T_{\text{equilíbrio}} - 10) &= 0 \\ T_{\text{equilíbrio}} &= 44^\circ\text{C}. \end{aligned}$$

6. Num **termómetro de gás de Joly** cuja superfície livre está **à pressão atmosférica**, o diâmetro interno dos tubos de mercúrio é de **6 mm**. A diferença entre as alturas das duas superfícies do mercúrio é de **1 cm** e a **superfície livre está a um nível mais elevado que o nível da superfície interior**. Calcule a **pressão do gás dentro do termómetro**. A densidade do mercúrio é  **$13.53 \text{ g cm}^{-3}$** .



## Resolução



**Figura 1.1:** Termómetro de Joly em que a superfície livre está elevada de 1 cm relativamente à superfície interior do termómetro, tal como descrito no enunciado.

Utilizando a expressão 1.5 do formulário vem diretamente que

$$P = P_a + P_{Hg} = P_a + \rho gh = 101325 + 13530 \times 9.8 \times 0.01 = 102651 \text{ Pa.}$$

7. Num calorímetro com 0.5l de água a 20°C é colocada uma pedra de mármore de 30 g a 150°C. Calcule a temperatura final da água no calorímetro.

O calor específico do mármore está tabelado e é  $860 \text{ J kg}^{-1} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ .

## Resolução

Havendo conservação da energia interna do sistema água + mármore tem-se que, em módulo,  $\Delta Q_{\text{água}} + \Delta Q_{\text{mármore}} = 0$ :

$$\begin{aligned} m_{\text{água}} c_{\text{água}} \Delta T_{\text{água}} &= -m_{\text{mármore}} c_{\text{mármore}} \Delta T_{\text{mármore}} \\ 0.5 \times 4181 \times (T_{\text{equilíbrio}} - 20) &= -0.030 \times 860 \times (T_{\text{equilíbrio}} - 150) \\ T_{\text{equilíbrio}} &= 21.6 \text{ }^\circ\text{C.} \end{aligned}$$

8. Numa zona costeira a água do mar está à temperatura  $T_0$ . Suponha que a temperatura da água do mar desce 1°C. Este arrefecimento é acompanhado por um aumento da temperatura do ar.

O calor específico do ar está tabelado e é  $c = 1012 \text{ J kg}^{-1} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ .

- (a) Calcule a quantidade de calor libertado por 1 m<sup>3</sup> de água.

## Resolução

$$Q_{\text{água}} = m_{\text{água}} c_{\text{água}} \Delta T_{\text{água}} = 1000 \times 4181 \times (-1) = -4.181 \times 10^6 \text{ J.}$$

- (b) O calor libertado faz subir  $1^{\circ}\text{C}$  uma certa quantidade de ar de volume  $V_0$ . Calcule  $V_0$ . A densidade do ar é  $\rho = 1.2 \text{ kg m}^{-3}$ .

### Resolução

$$Q_{\text{ar}} = m_{\text{ar}} c_{\text{ar}} \Delta T_{\text{ar}} \Leftrightarrow 4.181 \times 10^6 = m_{\text{ar}} \times 1012 \times 1 \Leftrightarrow m_{\text{ar}} = 4131.42 \text{ kg}$$

$$\rho_{\text{ar}} = 1.2 \text{ kg m}^{-3} \Rightarrow V_0 = \frac{m_{\text{ar}}}{\rho_{\text{ar}}} = 3443 \text{ m}^3.$$

9. Uma pessoa respira ao ritmo de 14 inspirações-expirações por minuto. Em cada ciclo de respiração, são inspirados/expirados 0.5l de ar. A temperatura do ar expirado é de  $28^{\circ}\text{C}$ . Se a temperatura exterior é de  $0^{\circ}\text{C}$ , determine a quantidade de energia por unidade de tempo que é gasta para aquecer o ar expirado. Qual a energia gasta ao fim de um dia? Dê o resultado em kilocalorias. A densidade do ar é  $\rho = 1.2 \text{ kg m}^{-3}$ .

### Resolução

A quantidade de calor necess'aria para aquecer o ar num ciclo de respiração (0.5l) é

$$Q_{\text{ar}} = \underbrace{m_{\text{ar}}}_{\rho_{\text{ar}} V_{\text{ar}}} c_{\text{ar}} \Delta T_{\text{ar}} = 1.2 \times 0.5 \times 10^{-3} \times 1012 \times (28 - 0) = 17 \text{ J}.$$

Dado o calor para aquecer o ar num ciclo de respiração, é óbvio que

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{17 \times 14}{60} = 3.97 \text{ J s}^{-1}.$$

Para obter a energia gasta ao fim de um dia utiliza-se o resultado anterior, multiplica-se o mesmo pela duração de um dia em segundos e converte-se o resultado para kilocalorias:

$$E = 3.97 \times 24 \times 3600 \times 0.239 \times 10^{-3} = 82 \text{ kcal}.$$

10. O tabuleiro da ponte sobre o Tejo é feito de ferro e tem 2278 m de comprimento. Calcule a variação do comprimento da ponte quando a temperatura aumenta de  $10^{\circ}\text{C}$  para  $30^{\circ}\text{C}$ . O coeficiente de expansão linear do ferro é  $\alpha = 11 \times 10^{-6} ^{\circ}\text{C}^{-1}$ .

**Resolução**

Utilizando a expressão 1.7 do formulário resulta que

$$\Delta L = \alpha L_i \Delta T = 11 \times 10^{-6} \times 2278 \times (30 - 10) = 0.50 \text{ m.}$$

11. Ao levantar voo e à temperatura de  $30^\circ\text{C}$ , a envergadura da asa de um avião comercial é de  $34 \text{ m}$ . Considere que a fuselagem exterior do avião é feita de **alumínio**. À altitude de  $11000 \text{ m}$ , a temperatura exterior é de  $-70^\circ\text{C}$ . Determine a envergadura do avião a  $11000 \text{ m}$  de altitude. O coeficiente de expansão linear do alumínio é de  $2.4 \times 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ .

**Resolução**

Utilizando novamente a fórmula 1.7 do formulário resulta que

$$L_f = L_i + \Delta L = (1 + \alpha \Delta T) L_i = (1 + 2.4 \times 10^{-5} \times (-70 - 30)) \times 34 = 33.92 \text{ m.}$$

12. Um termómetro de mercúrio é constituído por um recipiente com a forma esférica com  $0.25 \text{ cm}$  de diâmetro interior e por um tubo capilar de  $0.004 \text{ cm}$  de diâmetro interior. A uma certa temperatura  $T_0$ , o mercúrio **enche apenas o recipiente esférico**. Calcule a **variação da altura do mercúrio no capilar** para um **aumento de temperatura de  $30^\circ\text{C}$** . O coeficiente de expansão linear do mercúrio é  $\alpha = 0.606 \times 10^{-4} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ .

**Resolução**

Sabe-se que é possível relacionar o coeficiente de expansão linear de um dado material com o seu coeficiente de expansão volumica:  $\beta = 3\alpha$ .

O volume que irá preencher o capilar será portanto

$$\Delta V = 3\alpha V_i \Delta T,$$

em que

$$V_i = \frac{4}{3} \pi \left( \frac{0.25 \times 10^{-2}}{2} \right)^3.$$

O volume ocupado no capilar é dado pela fórmula do volume do cilindro:

$$\Delta V = \left( \frac{4 \times 10^{-5}}{2} \right)^2 \pi \Delta L \Leftrightarrow \Delta L = \frac{\Delta V}{\left( \frac{4 \times 10^{-5}}{2} \right)^2 \pi}.$$

Conclui-se assim que a variação da altura do mercúrio no capilar é

$$\Delta L = \frac{3\alpha \frac{4}{3}\pi \left(\frac{0.25 \times 10^{-2}}{2}\right)^3 \Delta T}{\left(\frac{4 \times 10^{-5}}{2}\right)^2 \pi} = 3.55 \times 10^{-2} \text{ m.}$$

Note-se que se considera simplificada-mente que o ar comporta-se como um gás ideal e é necessário nunca esquecer que para efeitos de cálculo as temperaturas vêm em kelvin.

13. Qual o volume de **1 mol** de ar à pressão de **1 atm** e à temperatura de **30 °C**?

### Resolução

Utilizando a expressão 1.10 do formulário tem-se que

$$V = \frac{nRT}{P} = 25 \times 10^{-3} \text{ m}^3 = 25 \text{ l.}$$

14. Calcule a pressão de **1 kg** de ar à contido num recipiente de **1 m<sup>3</sup>** à temperatura de **20 °C**. Considere que o ar é constituído por **21% de O<sub>2</sub>** e **79% de N<sub>2</sub>**.

### Resolução

Primeiramente é necessário calcular o número de moles de gás existentes no volume de ar referido:

$$n = \left( \frac{0.21}{16 \times 10^{-3} \times 2} + \frac{0.79}{14 \times 10^{-3} \times 2} \right) \times 1 = 34.78 \text{ mol.}$$

Tendo calculado o número de moles, através da lei dos gases ideais 1.10, a pressão do gás é

$$P = \frac{nRT}{V} = 84764.8 \text{ Pa} = 0.84 \text{ atm.}$$

15. A massa molar do alumínio é de **27 g mol<sup>-1</sup>** e a sua densidade é de **2.7 g cm<sup>-3</sup>**. A massa molar do urânio é de **238 g mol<sup>-1</sup>** e a sua densidade é de **18.9 g cm<sup>-3</sup>**. Faça uma estimativa dos **diâmetros dos átomos de alumínio e de urânio**.

### Resolução

Para simplificar, considera-se que os átomos estão contidos em cubos, pelo que o volume ocupado por um átomo é o cubo do seu diâmetro:  $V = d^3$ .

Por outro lado, o volume de um átomo pode ser obtido pela seguinte fórmula

$$V = \frac{M}{N_A} \frac{1}{\rho},$$

em que  $M$  é a massa molar,  $N_A$  o número de Avogadro e  $\rho$  a densidade.

Posto isto, tem-se que

$$d_{\text{alumínio}} = \sqrt[3]{\frac{M_{\text{alumínio}}}{N_A} \frac{1}{\rho_{\text{alumínio}}}} = 2.55 \text{ \AA}$$

e que

$$d_{\text{urânio}} = \sqrt[3]{\frac{M_{\text{urânio}}}{N_A} \frac{1}{\rho_{\text{urânio}}}} = 2.76 \text{ \AA}.$$

16. À pressão atmosférica, 1 l de água a 100 °C tem aproximadamente 1 dm<sup>3</sup> de volume. Depois da transição de fase que ocorre a 100 °C, calcule o volume do mesmo número de moléculas de vapor de água a 100 °C.

É bom lembrar que para efeito de cálculos numéricos a pressão deve vir em Pascal (unidades do SI). 1 atm = 101325 Pa e 1 bar = 10<sup>5</sup> Pa.

### Resolução

Em primeiro lugar é necessário obter o número de moles de moléculas de água correspondentes a 1 kg. Para isso considera-se que a massa molar da água é aproximadamente  $M_{\text{água}} = 2M_H + M_O = 2 \times 1 + 16 = 18 \text{ g mol}^{-1}$ . De seguida obtém-se o número de moles fazendo

$$n = \frac{m}{M} = \frac{1}{18 \times 10^{-3}} = 55.56 \text{ mol}.$$

Pela lei dos gases ideais 1.10, o volume a 100 °C de 1 kg de vapor de água é

$$V = \frac{nRT}{P} = 1.7 \text{ m}^3.$$

17. Uma garrafa de mergulho com uma capacidade de 20 l e à temperatura de 20 °C contém ar à pressão de 150 atm. Um mergulhador respira 50 l de ar por minuto. Sabendo que o mergulhador respira ar à pressão a que se encontra e que a temperatura da água é de 15 °C, determine o tempo de mergulho a 10 m de profundidade.

### Resolução

A pressão a que se encontra o mergulhador pode ser obtida pela soma da

pressão atmosférica com a pressão que a massa de água exerce sobre ele:

$$P = P_a + \rho_{\text{água}}gh = P_a + 1000 \times 9.8 \times 10 = 199325 \text{ Pa}.$$

Pela lei dos gases ideais 1.10, tem-se que

$$PV = nRT \Leftrightarrow n = \frac{PV}{RT}, n = C^{te}.$$

Tendo  $n$  constante e designando por  $X_B$  a propriedade  $X$  do gás dentro da botija, tem-se que

$$\frac{P_B V_B}{RT_B} = \frac{PV}{RT} \Leftrightarrow V = \frac{P_B V_B}{RT_B} \frac{RT}{P} = 1.5 \text{ m}^3.$$

Finalmente, a duração do mergulho a 10 m de profundidade pode ser obtida fazendo

$$\Delta t = \frac{V}{\frac{dV}{dt}} = \frac{1.5}{50 \times 10^{-3}} \approx 30 \text{ min}.$$

18. Calcule o conteúdo calorífico de 1 l de ar à pressão atmosférica e a 25 °C. Como o ar é constituído por 21% de  $O_2$  e 79% de  $N_2$ , calcule os conteúdos caloríficos contidos nas moléculas de oxigénio e de azoto. Calcule o calor específico do gás de  $N_2$ . O calor específico do gás de  $O_2$  é  $c_{\text{oxigénio}} = 915 \text{ J kg}^{-1} \text{ °C}^{-1}$  e o calor específico do ar é  $c_{\text{ar}} = 1012 \text{ J kg}^{-1} \text{ °C}^{-1}$ .

### Resolução

Utilizando a equação dos gases ideais 1.10 tem-se que

$$n_{\text{ar}} = \frac{P_{\text{ar}} V_{\text{ar}}}{RT_{\text{ar}}} = 0.04 \text{ mol}.$$

A massa do ar vem, consequentemente,

$$\begin{aligned} m_{\text{ar}} &= (0.21 \times M_{\text{oxigénio}} + 0.79 \times M_{\text{azoto}})n_{\text{ar}} \\ &= (0.21 \times 16 \times 2 + 0.79 \times 14 \times 2)n_{\text{ar}} \\ &= 1.18 \times 10^{-3} \text{ kg}. \end{aligned}$$

Com os valores anteriores, o conteúdo calorífico do ar é

$$Q_{\text{ar}} = m_{\text{ar}} c_{\text{ar}} T_{\text{ar}} = 356 \text{ J}.$$

O conteúdo calorífico do oxigénio ( $O_2$ ) é

$$Q_{\text{oxigénio}} = m_{\text{oxigénio}} c_{\text{oxigénio}} T_{\text{ar}} = 0.21 \times n_{\text{ar}} \times 16 \times 2 \times c_{\text{oxigénio}} T_{\text{ar}} = 75 \text{ J}.$$

O conteúdo calorífico do azoto pode ser obtido pela diferença entre os conteúdos caloríficos do ar e do oxigénio, e a partir do resultado calcula-se o calor específico do azoto.

$$Q_{\text{azoto}} = Q_{\text{ar}} - Q_{\text{oxigénio}} = 281 \text{ J}$$

e, portanto,

$$281 = m_{\text{azoto}} c_{\text{azoto}} T_{\text{ar}} \Leftrightarrow c_{\text{azoto}} = \frac{281}{0.79 \times n_{\text{ar}} \times 14 \times 2 \times T_{\text{ar}}} = 1042 \text{ J kg}^{-1} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}.$$

19. Utilizando o **modelo de Van der Waals** para os gases, estime o **volume das moléculas de  $CO_2$  e de  $O_2$** . Assumindo que ambas as **moléculas são aproximadamente esféricas**, calcule os seus **diâmetros** e dê o resultado em **angstrom** ( $1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$ ).

Os parâmetros  $b$  para os gases  $CO_2$  e  $O_2$  são, respetivamente,  $4.29 \times 10^{-5} \text{ m}^3 \text{ mol}^{-1}$  e  $3.19 \times 10^{-5} \text{ m}^3 \text{ mol}^{-1}$ .

### Resolução

Pela interpretação da relação 1.11 sabe-se que

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \simeq V \simeq \frac{b}{N_A} \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{3b}{4N_A\pi}} \Rightarrow d = 2\sqrt[3]{\frac{3b}{4N_A\pi}}.$$

Da igualdade anterior resulta que  $V_{CO_2} \approx 7.11 \times 10^{-29} \text{ m}^3$ ,  $d_{CO_2} \approx 5.14 \text{ \AA}$ ,  $V_{O_2} \approx 5.30 \times 10^{-29} \text{ m}^3$  e  $d_{O_2} \approx 4.66 \text{ \AA}$ .

20. Calcule a **temperatura crítica**, a **pressão crítica** e o **volume molar crítico** para a **água**.

### Resolução

Sabendo que para a água se tem  $a = 5.45 \text{ l}^2 \text{ atm mol}^{-2} = 0.552 (\text{m}^3)^2 \text{ Pa mol}^{-2}$  e  $b = 3.05 \times 10^{-5} \text{ m}^3 \text{ mol}^{-1}$  as propriedades pedidas são calculadas diretamente pelas relações 1.12, 1.13 e 1.14. Os resultados numéricos são

$$\begin{aligned} T_C &= 645 \text{ K} = 372 \text{ } ^\circ\text{C}; \\ P_C &= 2.196 \times 10^7 \text{ Pa} = 216.7 \text{ atm}; \\ V_{MC} &= 9.15 \times 10^{-5} \text{ m}^3 \text{ mol}^{-1}. \end{aligned}$$

21. O gás etano ( $C_2H_6$ ) tem um poder calorífico de  **$373 \text{ kcal mol}^{-1}$** . Suponha que na sua combustão só se aproveita 60% do calor libertado. Determine que **quantidade**

Neste exercício é necessário especial cuidado, pois todos os dados devem ser convertidos para unidades do SI antes de efetuar os cálculos.

de gás etano, em litros e nas condições PTN (1 atm e 0 °C), que se deve queimar para transformar 50 kg de água a 10 °C em vapor a 100 °C ( $L_e = 540 \text{ cal g}^{-1}$ ).

### Resolução

O calor que é necessário fornecer à água a 10 °C para a transformar em vapor de água a 100 °C é

$$Q_{\text{água}} = m_{\text{água}}(c_{\text{água}}\Delta T_{\text{água}} + L_e) = 131.82 \text{ MJ}.$$

Sabe-se que 60% do número total de moles de etano que é necessário queimar para vaporizar a água se obtém dividindo o resultado anterior pelo poder calorífico do etano, portanto

$$\frac{Q_{\text{água}}}{Q_{\text{etano}}} = 84.46 \text{ mol} = 0.6 \times n_{\text{etano}} \Leftrightarrow n_{\text{etano}} = 140.77 \text{ mol}.$$

Tendo o número total de moles de etano necessário para esta reacção, utiliza-se a relação 1.10 para determinar, em condições PTN, o volume necessário do gás:

$$V = \frac{nRT}{P} = 3.155 \text{ m}^3 = 3155 \text{ l}.$$



## 1.2 Formulário

**Conversão de temperaturas**

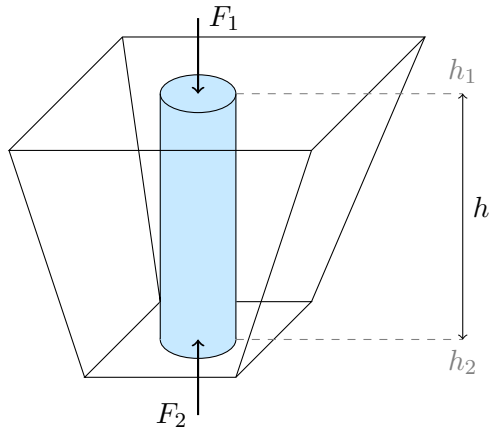
$$[^{\circ}F] = \frac{9}{5}[^{\circ}C] + 32 \quad (1.1)$$

$$[K] = [^{\circ}C] + 273.15 \quad (1.2)$$

$$[K] = \frac{5}{9}([^{\circ}F] - 32) + 273.15 \quad (1.3)$$

**Variação de calor**

$$\Delta Q = mc\Delta T \quad (1.4)$$

**Pressão num fluido**

**Figura 1.2:** Pressão numa diminuta área a uma certa profundidade num fluido.

$$F_2 - F_1 = \rho ghA \Rightarrow P_2 = P_1 + \rho gh \quad (1.5)$$

onde  $A$  designa a diminuta área considerada,  $\rho$  a densidade do fluido e  $g$  a aceleração gravítica à face da Terra.

**Unidades de energia**

$$1 \text{ J} = 0.239005736 \text{ cal} = \frac{1}{q} \text{ eV} \quad (1.6)$$

onde  $q$  representa a carga do eletrão.

**Expansão linear, quadrática e volúmica**

$$\Delta L = \alpha L_i \Delta T \quad (1.7)$$

$$\Delta A = \gamma A_i \Delta T \quad (1.8)$$

$$\Delta V = \beta V_i \Delta T \quad (1.9)$$

onde  $\alpha$  representa o coeficiente de expansão linear,  $\gamma$  o coeficiente de expansão por unidade de área e  $\beta$  o coeficiente de expansão volúmica.

Para um mesmo material tem-se que  $\gamma = 2\alpha$  e  $\beta = 3\alpha$ .

**Lei dos gases perfeitos - simples**

$$PV = nN_A kT = nRT \quad (1.10)$$

onde  $N_A$  é o número de Avogadro e  $k$  a constante de Boltzman.  $R = N_A k \approx 8.3145 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$ .

**Lei dos gases perfeitos - Van der Walls**

$$\left(P + a \frac{n^2}{V^2}\right)(V - nb) = nRT \quad (1.11)$$

$$T_C = \frac{8a}{27Rb} \quad (1.12)$$

$$P_C = \frac{a}{27b^2} \quad (1.13)$$

$$V_{MC} = 3b \quad (1.14)$$

onde  $T_C$ ,  $P_C$  e  $V_{MC}$  representam a temperatura crítica, a pressão crítica e o volume molar crítico, respetivamente.



## Capítulo 2

# O primeiro princípio da termodinâmica (série 2)

### 2.1 Resolução de exercícios

1. Um cilindro com um êmbolo móvel contém 0.2 mol de um gás ideal. O êmbolo tem 8 kg de massa e a área da base é de 5 cm<sup>2</sup>. O êmbolo pode mover-se livremente na direção vertical, mantendo a pressão do gás constante. Este dispositivo está no campo gravítico e à pressão atmosférica. Calcule o trabalho realizado pelo gás, quando se eleva a temperatura do gás de 20 °C para 300 °C. Calcule o volume que o gás ocupa a 20 °C e a 300 °C.

#### Resolução

Por definição, o trabalho realizado pelo gás é

$$\Delta W = - \int_{V_i}^{V_f} P \, dV = -PV_f + PV_i = -nR(T_f - T_i) = -465.612 \text{ J}.$$

Pela equação dos gases ideais tem-se que

$$PV = nRT \Leftrightarrow V = \frac{nRT}{P}.$$

A pressão a que o gás se encontra submetido devido ao êmbolo pode ser calculada através da equação  $P = F/A$ :

$$P = \frac{F}{A} = \frac{mg}{5 \times 10^{-4}} = 156800 \text{ Pa}.$$

Nos cálculos para determinar o trabalho utilizou-se a relação dos gases ideais  $PV = nRT$ .

A pressão devida ao êmbolo, junta-se ainda a pressão atmosférica, já que o êmbolo se encontra no campo gravítico terrestre à pressão atmosférica:

$$P_T = 156800 + 101325 = 258125 \text{ Pa.}$$

Resulta, assim, que o volume do gás a  $20^\circ\text{C}$  é

$$V_i = \frac{0.2 \times R \times (20 + 273.15)}{258125} \approx 1.9 \times 10^{-3} \text{ m}^3 = 1.9 \text{ l}$$

e a  $300^\circ\text{C}$  é

$$V_f = \frac{0.2 \times R \times (300 + 273.15)}{258125} \approx 3.7 \times 10^{-3} \text{ m}^3 = 3.7 \text{ l.}$$

2. Uma mole de gás ideal efetua um trabalho de  $3000 \text{ J}$  sobre o exterior, quando se expande isotermicamente até à pressão final de  $1 \text{ atm}$  e um volume de  $25 \text{ l}$ . Determine o volume inicial e a temperatura do gás.

### Resolução

Sabendo que a transformação é isotérmica, tem-se que

$$\Delta W = - \int_{V_i}^{V_f} P \, dV = - \int_{V_i}^{V_f} \frac{nRT}{V} \, dV = -nRT \ln \left( \frac{V_f}{V_i} \right) = nRT \ln \left( \frac{V_i}{V_f} \right).$$

Por outro lado, é possível descobrir a temperatura no final da transformação pela equação dos gases perfeitos, e visto que a transformação é isotérmica, a temperatura no final será igual à temperatura no início:

$$PV = nRT \Leftrightarrow T = \frac{PV}{nR} = 304.664 \text{ K.}$$

Sabendo a quantidade de trabalho que o gás efectuou sobre o exterior tem-se:

$$-\Delta W = nRT \ln \left( \frac{V_i}{V_f} \right) \Leftrightarrow V_i = V_f \times e^{-\frac{\Delta W}{nRT}} = 7.65 \times 10^{-3} \text{ m}^3 = 7.65 \text{ l.}$$

3. Cinco moles de um gás ideal expandem-se isotermicamente a  $127^\circ\text{C}$ , para quatro vezes o seu volume. Neste processo termodinâmico a energia interna não varia. Determine:

- (a) O trabalho realizado pelo gás.

**Resolução**

Pela conclusão retirada na alínea anterior vem que

$$W = -nRT \ln \left( \frac{V_f}{V_i} \right) = -nRT \ln(4) = -23.1 \times 10^3 \text{ J.}$$

- (b) O fluxo de calor para o sistema.

**Resolução**

Sabendo que  $\Delta U = \Delta Q + \Delta W = 0$ , resulta que  $\Delta Q = -\Delta W = 23.1 \times 10^3 \text{ J}$ .

4. Determine a expressão geral do trabalho realizado numa expansão isotérmica de um gás de Van der Waals.

**Resolução**

Resolvendo a equação dos gases perfeitos de Van der Waals em ordem à pressão, tem-se

$$\left( P + a \frac{n^2}{V^2} \right) (V - nb) = nRT \Leftrightarrow P = \frac{nRT}{V - nb} - a \frac{n^2}{V^2}.$$

Por consequência, é possível obter a expressão geral do trabalho de um gás de Van der Waals da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \Delta W &= - \int_{V_i}^{V_f} P \, dV \\ &= - \int_{V_i}^{V_f} \left[ \frac{nRT}{V - nb} - a \frac{n^2}{V^2} \right] dV \\ &= - \left( nRT [\ln(V - nb)]_{V_i}^{V_f} + an^2 \left[ \frac{1}{V} \right]_{V_i}^{V_f} \right) \\ &= -nRT \ln \left( \frac{V_f - nb}{V_i - nb} \right) - an^2 \left( \frac{1}{V_f} - \frac{1}{V_i} \right). \end{aligned}$$

5. Um gás, com uma equação de estado  $P = \alpha V^2$ , em que  $\alpha = 5 \text{ atm m}^{-6}$ , expande-se. Se o volume inicial é de  $1 \text{ m}^3$  e o volume final é de  $2 \text{ m}^3$ , calcule o trabalho realizado pelo gás.

**Resolução**

Calculando o trabalho realizado pelo gás pela definição, tem-se que:

$$\Delta W = - \int_{V_i}^{V_f} P \, dV = - \int_{V_i}^{V_f} \alpha V^2 \, dV = - \left[ \frac{\alpha}{3} V^3 \right]_{V_i}^{V_f} = -1.18 \times 10^6 \, \text{J}.$$

6. Um gás expande-se **isotermicamente** dando trabalho ao exterior, num processo em que a **energia interna não varia**. Suponha-se que, inicialmente, **1 mol de gás ocupa um volume de 1 l, à temperatura de 20 °C**, e que o trabalho dado ao exterior na expansão isotérmica é de **1000 J**.
- (a) Calcule o **volume final do gás**, supondo que este se comporta como um **gás ideal**.

**Resolução**

Resolvendo a equação dos gases ideais em ordem à pressão tem-se

$$PV = nRT \Leftrightarrow P = \frac{nRT}{V}.$$

Utilizando a definição do cálculo do trabalho de uma transformação de um gás vem que

$$\Delta W = - \int_{V_i}^{V_f} \frac{nRT}{V} \, dV = -nRT \ln \left( \frac{V_f}{V_i} \right).$$

Resolvendo a equação anterior em ordem a  $V_f$  tem-se

$$V_f = V_i e^{-\frac{\Delta W}{nRT}} = 1.51 \times 10^{-3} \, \text{m}^3.$$

- (b) Supondo que **o gás não é ideal, mas sim um gás de Clausius**. Isto é, a **equação de estado do gás é  $P(V - nb) = nRT$** , em que  $nb$  é o volume excluído. Determine o **trabalho realizado numa expansão isotérmica do gás de Clausius**.

**Resolução**

Utilizando a definição de trabalho de um gás vem que

$$\Delta W = - \int_{V_i}^{V_f} \frac{nRT}{(V - nb)} dV = -nRT \ln \left( \frac{V_f - nb}{V_i - nb} \right).$$

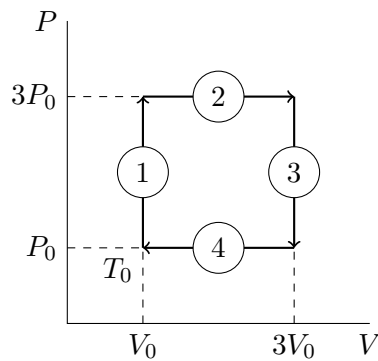
- (c) Calcule o volume final do gás de Clausius, sabendo que  $b = 0.031 \text{ mol}^{-1}$ .

### Resolução

Pela expressão anterior resolvida em ordem a  $V_f$  resulta que

$$V_f = (V_i - nb) e^{-\frac{\Delta W}{nRT}} + nb = 1.49 \times 10^{-3} \text{ m}^3.$$

7. Um gás ideal sofre uma transformação cíclica como a representada na figura 2.1. No instante inicial, as variáveis de estado são  $T_0$ ,  $V_0$  e  $P_0$ .



**Figura 2.1:** Transformação cíclica.

- (a) Determine o trabalho efetuado pelo gás, num ciclo.

### Resolução

As transformações 1 e 3 são isocóricas e isotérmicas, pelo que o trabalho vem dado pela expressão 2.4 do formulário:

$$\Delta W = -nRT \ln \left( \frac{P_i}{P_f} \right)$$

e as transformações 2 e 4 são isobáricas e isotérmicas, pelo que o trabalho

vem dado pela igualdade 2.2 do formulário:

$$\Delta W = -nR(T_f - T_i).$$

Assim, os trabalhos dos diferentes ramos são

$$\begin{aligned}\Delta W_1 &= -nRT_0 \ln\left(\frac{3P_0}{P_0}\right) = -nRT_0 \ln(3); \\ \Delta W_2 &= -3P_0(3V_0 - V_0) = -6P_0V_0; \\ \Delta W_3 &= -nRT_0 \ln\left(\frac{P_0}{3P_0}\right) = nRT_0 \ln(3) = -\Delta W_1; \\ \Delta W_4 &= P_0(3V_0 - V_0) = 2P_0V_0.\end{aligned}$$

O trabalho total de um ciclo obtém-se somando os trabalhos individuais dos diferentes ramos, portanto

$$\Delta W = \sum_k \Delta W_k = \Delta W_1 + \Delta W_2 + \Delta W_3 + \Delta W_4 = -4P_0V_0.$$

- (b) Qual a quantidade de calor fornecida ao gás, num ciclo?

#### Resolução

Sabe-se que há conservação da energia interna do gás, e que  $\Delta U = \Delta Q + \Delta W$ , portanto conclui-se que

$$\Delta Q = -\Delta W = 4P_0V_0.$$

- (c) Calcule o trabalho por ciclo, supondo que inicialmente se tem 1 mol de gás, a 0°C.

#### Resolução

Utilizando a equação dos gases ideais deduz-se que

$$\Delta W = -4P_0V_0 = -4nRT_0 = -9084.42 \text{ J}.$$

8. O calor específico do cobre a baixas temperaturas é

$$c_P = 30.5 \left(\frac{T}{\theta}\right)^3 \text{ kJ K}^{-1} \text{ kg}^{-1},$$



em que  $\theta = 348 \text{ K}$  é uma constante, a temperatura de Debye do cobre. Determine a quantidade de energia que é necessário fornecer a  $100 \text{ g}$  de cobre para o aquecer de  $4 \text{ K}$  a  $30 \text{ K}$ , a pressão constante.

### Resolução

Antes de efetuar cálculos, é uma boa prática determinar a expressão equivalente à dada no enunciado nas unidades do *S.I.*, portanto:

$$c_P = 30.5 \left( \frac{T}{348} \right)^3 \times 10^3 \text{ J K}^{-1} \text{ kg}^{-1}.$$

Assim, o cálculo do calor necessário para elevar de  $4 \text{ K}$  a  $30 \text{ K}$   $100 \text{ g}$  de cobre é

$$Q = \int_{T_i}^{T_f} n c_P dT = \int_4^{30} \left[ m \times 30.5 \left( \frac{T}{348} \right)^3 \times 10^3 \right] dT = 14.65 \text{ J}.$$

9. Um gás diatômico expande-se adiabaticamente para um volume que é duas vezes superior ao volume inicial. Sendo a temperatura inicial igual a  $18^\circ\text{C}$ , calcule a temperatura final.

### Resolução

Uma vez que a transformação é adiabática,  $\Delta Q = 0$ . Sabe-se que  $TV^{\gamma-1} = C^{te}$  e que, para um gás diatômico,  $\gamma = 7/5$ . Pelas considerações anteriores resulta que

$$T_i V_i^{\gamma-1} = T_f V_f^{\gamma-1} \Leftrightarrow T_f = T_i \left( \frac{V_i}{V_f} \right)^{\gamma-1} = T_i \times 2^{1-\gamma} = -52.5^\circ\text{C}.$$

10. Numa botija, o gás está à pressão de  $10 \text{ atm}$  e à temperatura de  $20^\circ\text{C}$ . Calcule a temperatura do gás, quando este sai da botija e fica à pressão atmosférica. Suponha que  $\gamma = 7/5$ .

### Resolução

Supondo que a transformação é adiabática, tem-se que  $TP^{\frac{1}{\gamma}-1} = C^{te}$ , por-

tanto:

$$T_i P_i^{\frac{1}{\gamma}-1} = T_f P_f^{\frac{1}{\gamma}-1} \Leftrightarrow T_f = T_i \left( \frac{P_i}{P_f} \right)^{\frac{1}{\gamma}-1} = T_i \times 10^{\frac{1}{\gamma}-1} = -121.31^\circ\text{C}.$$

11. Através da **distribuição de Maxwell-Boltzmann**, calcule o **valor médio da velocidade das moléculas do ar a 30 °C, a 0 °C e a 1 K**. Considere que o ar é constituído por **21% de  $O_2$**  e **79% de  $N_2$**  e que as massa molares do oxigénio e do azoto são  **$m_O = 15.9994 \text{ g}$**  e  **$m_N = 14.0067 \text{ g}$** .

### Resolução

Em primeiro lugar, com os dados facultados, dever-se-á calcular a massa molar do ar:

$$M_{\text{ar}} = 0.21 \times 2 \times m_O + 0.79 \times 2 \times m_N = 2.884 \times 10^{-2} \text{ kg mol}^{-1}.$$

A velocidade média das moléculas de ar é obtida pela igualdade 2.11 do formulário:

$$v_m = \sqrt{\frac{8 k_B T}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8 R T}{\pi M}}$$

pelo que, substituindo as várias temperaturas e a massa molar do ar se obtêm:

$$\begin{cases} v_m(30^\circ\text{C}) &= 472 \text{ m s}^{-1} \\ v_m(0^\circ\text{C}) &= 448 \text{ m s}^{-1} \\ v_m(1 \text{ K}) &= 27.2 \text{ m s}^{-1} \end{cases}$$

12. Calcule o **livre percurso médio** e o **número de colisões por unidade de tempo** das moléculas de **1 l de vapor de água**, à **pressão atmosférica** e à **temperatura de 100 °C**. Calcule a **separação molecular média** das moléculas do gás. Assuma que **a molécula de água pode ser inscrita num quadrado com  $10^{-10} \text{ m}$  de lado**.

Considera-se que a massa molar da água é, aproximadamente,  $18 \times 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1}$ .

### Resolução

Por definição, o livre percurso médio de uma molécula é dado por

$$l = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi r^2 P} = 4.6 \times 10^{-6} \text{ m}$$

onde  $r = 0.5 \times 10^{-10}$ , e a velocidade média das moléculas de vapor de água,

também por definição, é

$$v_m = \sqrt{\frac{8}{\pi} \frac{RT}{M}} = 663 \text{ m s}^{-1}.$$

O número de colisões por unidade de tempo das moléculas de vapor de água define-se

$$Z = \frac{v_m}{l} = 1.45 \times 10^8 \text{ s}^{-1}.$$

Para determinar a separação molecular média das moléculas de vapor de água, sabe-se que

$$P = n_V k_B T$$

onde  $n_V$  é o número de moléculas por unidade de volume. Resolvendo a igualdade anterior em ordem a  $n_V$  obtém-se

$$n_V = \frac{P}{k_B T}.$$

Para chegar à separação molecular média, apenas se tem de calcular o inverso da raiz cúbica do resultado anterior, por questões de unidades. Assim, a separação molecular média é

$$\delta = \left( \frac{P}{k_B T} \right)^{-\frac{1}{3}} = 3.70 \times 10^{-9} \text{ m}.$$

13. As paredes de um iglu têm 50 cm de espessura. Se se quiser substituir o iglu por uma casa de betão, determine qual terá de ser a espessura das paredes de betão para que o novo abrigo tenha as mesmas propriedades térmicas que o iglu. Condutividades térmicas:  $k_{\text{gelo}} = 2.22 \text{ W m}^{-1} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ ,  $k_{\text{betão}} = 1.28 \text{ W m}^{-1} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ .

A diferença de temperaturas entre o interior e o exterior da casa do esquimó é constante e igual a  $\Delta T$ .

### Resolução

Para a casa de betão ter as mesmas propriedades térmicas do iglu, tem-se que  $\phi_{\text{gelo}} = \phi_{\text{betão}}$ , e sendo  $\phi = -k\Delta T/l$ , tem-se que

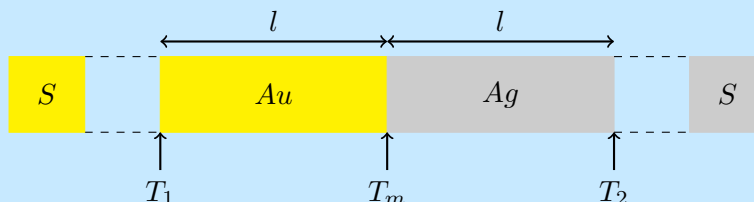
$$k_{\text{gelo}} \frac{\Delta T}{l_{\text{gelo}}} = k_{\text{betão}} \frac{\Delta T}{l_{\text{betão}}} \Leftrightarrow l_{\text{betão}} = 2.9 \times 10^{-1} \text{ m}.$$

14. Duas barras metálicas de ouro e prata estão em contacto térmico. As barras têm a mesma secção e o mesmo comprimento. Se uma das extremidades de uma das barras está a 80 °C e a outra extremidade da outra barra está a 30 °C, determine a temperatura na região de contacto das barras. Considere as duas situações

possíveis: o ouro ou a prata em contacto com a fonte quente. Condutividades térmicas:  $k_{Ag} = 427 \text{ W m}^{-1} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$ ,  $k_{Au} = 314 \text{ W m}^{-1} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$ .

### Resolução

O enunciado sugere o sistema termodinâmico representado na figura 2.2.



**Figura 2.2:** Sistema termodinâmico de duas barras de metais diferentes em contacto térmico.

**Hipótese 1 ( $T_1 = 80^{\circ}\text{C}$ ):** Uma vez que os metais estão em contacto térmico, obrigatoriamente  $\phi_{Au} = -\phi_{Ag}$ , portanto,

$$k_{Au}S \frac{(80 - T_m)}{l} = k_{Ag}S \frac{(T_m - 30)}{l} \Leftrightarrow T_m = 51.2^{\circ}\text{C}.$$

**Hipótese 2 ( $T_2 = 80^{\circ}\text{C}$ ):** Levando a cabo um raciocínio análogo ao anterior, obtém-se  $T_m = 58.8^{\circ}\text{C}$ .

15. Um chalé de montanha tem uma janela para a paisagem, com uma área de  $6 \text{ m}^2$ . A janela é constituída por duas placas de vidro de  $4 \text{ mm}$ , separadas por uma almofada de ar de  $5 \text{ mm}$ . Determine qual é a perda de calor pela janela por unidade de tempo, quando a temperatura interior é de  $20^{\circ}\text{C}$  e a temperatura exterior é de  $-10^{\circ}\text{C}$ . Se o  $kWh$  de eletricidade custa  $0.12 \text{ €}$ , determine o custo diário mínimo para manter a casa a  $20^{\circ}\text{C}$ . Assuma que a temperatura exterior média diária é  $-15^{\circ}\text{C}$ . Condutividades térmicas:  $k_{ar} = 0.0234 \text{ W m}^{-1} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$  e  $k_{vidro} = 0.8 \text{ W m}^{-1} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$ .

### Resolução

Para determinar a perda de calor por unidade de tempo pela janela quando a temperatura exterior é de  $-10^{\circ}\text{C}$  e a temperatura interior é de  $20^{\circ}\text{C}$  recorre-se à fórmula 2.16 do formulário:

$$H = 6 \times \frac{20 - (-10)}{2 \times \frac{4 \times 10^{-3}}{k_{vidro}} + \frac{5 \times 10^{-3}}{k_{ar}}} = 804.7 \text{ W}.$$

Para determinar o custo diário para manter a casa a  $20^{\circ}\text{C}$  sendo a temperatura média diária do exterior  $-15^{\circ}\text{C}$  há que calcular a perda por unidade de tempo

através da janela para esta nova situação:

$$H_d = 6 \times \frac{20 - (-15)}{2 \times \frac{4 \times 10^{-3}}{k_{\text{vidro}}} + \frac{5 \times 10^{-3}}{k_{\text{ar}}}} = 938.9 \text{ W}.$$

Desta forma, o gasto médio diário para manter o chalé de montanha a  $20^\circ\text{C}$  vem

$$G_d = H_d \times 10^{-3} \times 24 \times 0.12 = 2.7 \text{ €}.$$

16. As janelas dos aviões são constituídas por duas placas de vidro separadas por uma câmara de ar. As placas de vidro têm cada uma 3 mm de espessura e distam 1 cm uma da outra. Cada janela tem 25 cm de largura e 40 cm de altura, e um avião comercial tem 100 janelas. Considere que a temperatura exterior é de  $-50^\circ\text{C}$  e a temperatura interior é de  $20^\circ\text{C}$ . A condutividade térmica do vidro é de  $k_{\text{vidro}} = 0.8 \text{ W m}^{-1} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$  e a do ar é de  $k_{\text{ar}} = 0.0234 \text{ W m}^{-1} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ .

- (a) Calcule a perda de calor por unidade de tempo através de uma janela.

#### Resolução

Utilizando a expressão 2.16 do formulário vem:

$$H_j = 25 \times 10^{-2} \times 40 \times 10^{-2} \times \frac{20 - (-50)}{2 \times \frac{3 \times 10^{-3}}{k_{\text{vidro}}} + \frac{1 \times 10^{-2}}{k_{\text{ar}}}} = 16.09 \text{ W}.$$

- (b) Qual terá de ser a potência do sistema de ar condicionado do avião, de modo a repor a energia perdida através das janelas?

#### Resolução

Uma vez que o avião tem 100 janelas, a potência do ar condicionado terá de ser 100 vezes a perda de calor por unidade de tempo de uma janela, portanto:

$$P = 100 \times H_j = 1609 \text{ W}.$$

- (c) Calcule a temperatura nas duas superfícies interiores dos vidros do avião.

#### Resolução

Na resolução desta alínea basta utilizar a forma particular da expressão 2.16, ou seja, a expressão 2.15 do formulário.

Na superfície interior do vidro de dentro tem-se

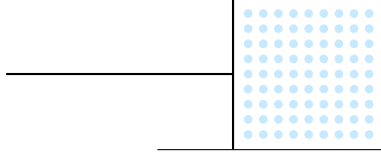
$$16.09 = 25 \times 10^{-2} \times 40 \times 10^{-2} \times \frac{20 - T}{\frac{3 \times 10^{-3}}{k_{\text{vidro}}}} \Leftrightarrow T = 19.4^{\circ}\text{C}$$

e na superfície interior do vidro de fora, analogamente, tem-se

$$16.09 = 25 \times 10^{-2} \times 40 \times 10^{-2} \times \frac{T - (-50)}{\frac{3 \times 10^{-3}}{k_{\text{vidro}}}} \Leftrightarrow T = -49.4^{\circ}\text{C}.$$

## 2.2 Formulário

### Deslocamento de um êmbolo



**Figura 2.3:** Esquema de um êmbolo capaz de comprimir e expandir uma determinada massa de gás.

$$W = - \int_{V_i}^{V_f} P \, dV \quad (2.1)$$

A transformação pode ser **isobárica**, e nesse caso a fórmula 2.1 vem

$$W = -P(V_f - V_i) = -nRT(T_f - T_i). \quad (2.2)$$

Por outro lado a transformação pode ocorrer a **temperatura constante**, e nesse caso a relação 2.1 vem

$$W = -nRT \ln \left( \frac{V_f}{V_i} \right) \quad (2.3)$$

$$= -nRT \ln \left( \frac{P_i}{P_f} \right). \quad (2.4)$$

**Nota 2.2.1.** Numa transformação isotérmica tem-se que

$$\begin{aligned} V_f > V_i &\Rightarrow W < 0 \\ V_f < V_i &\Rightarrow W > 0 \end{aligned}$$

### Variação de energia

A pressão constante

$$\Delta U = \int_{T_i}^{T_f} n c_P \, dT - \int_{V_i}^{V_f} P \, dV \quad (2.5)$$

e a volume constante

$$\Delta U = \int_{T_i}^{T_f} n c_V \, dT. \quad (2.6)$$

### Transformações adiabáticas

Considerando que os gases se comportam como gases ideais, sabe-se que:

$$c_P - c_V \approx R. \quad (2.7)$$

Para um gás monoatômico  $c_V = 3/2R$  e  $c_P = 5/2R$  e para um gás diatômico  $c_V = 5/2R$  e  $c_P = 7/2R$ .

Numa transformação adiabática são verdade as seguintes igualdades:

$$TV^{\gamma-1} = C_1^{te} \quad (2.8)$$

$$TP^{\frac{1}{\gamma}-1} = C_2^{te} \quad (2.9)$$

$$PV^{\gamma} = C_3^{te} \quad (2.10)$$

onde  $\gamma = c_P/c_V$  e as constantes 1, 2 e 3 **não são** necessariamente iguais. Para um gás monoatômico,  $\gamma = 5/3$  e para um gás diatômico  $\gamma = 7/5$ .

### Distribuição de Maxwell-Boltzman

As moléculas de um gás seguem a distribuição de Maxwell-Boltzman e as seguintes igualdades verificam-se:

$$v_m = \sqrt{\frac{8}{\pi} \frac{kT}{m}} \quad (2.11)$$

onde  $v_m$  é a velocidade média das moléculas,  $m$  a sua massa,  $T$  a temperatura e  $k$  a constante de Boltzman.

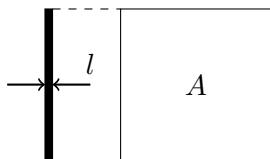
$$l = \frac{kT}{\sqrt{2\pi} r^2 P} \quad (2.12)$$

onde  $l$  designa o percurso médio livre,  $r$  o raio médio das moléculas e  $P$  a pressão que pode ser obtida fazendo  $P = nkT$ .

$$Z = \frac{v_m}{l} \quad (2.13)$$

onde  $Z$  designa o tempo livre médio entre colisões.

### Condução de calor



**Figura 2.4:** Ilustração de uma peça de um dado material atravessado por um fluxo de calor.

$$\phi = -k \frac{\Delta T}{l} \quad (2.14)$$

onde  $k$  representa a condutividade térmica do material.

$$H = kA \frac{\Delta T}{l} \quad (2.15)$$

onde  $H$  vem em unidades de potência. A expressão anterior pode ser generalizada para  $n$  materiais colocados em série:

$$H_n = A \frac{\Delta T}{\sum_n \frac{l_n}{k_n}} \quad (2.16)$$

onde  $\Delta T$  refere-se à diferença de temperaturas entre as duas faces exteriores.

### Conversão de $W$ para $kWh$

$$[kWh] = [W] \times 10^{-3} \times t_{hr}. \quad (2.17)$$



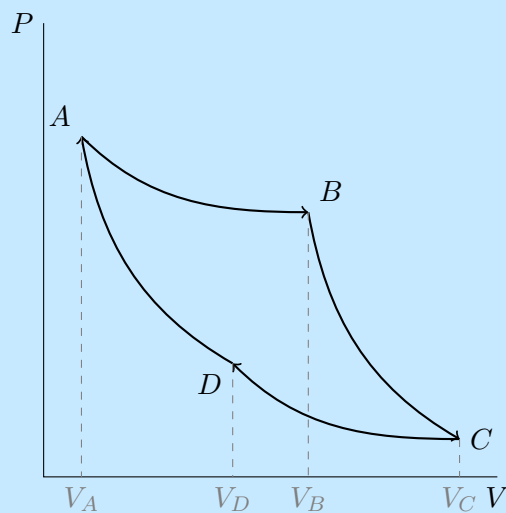
## Capítulo 3

# O segundo princípio da termodinâmica (série 3)

### 3.1 Resolução de exercícios

1. Um mole de um gás descreve um ciclo de Carnot, entre as temperaturas de  $20^\circ\text{C}$  e  $120^\circ\text{C}$ . Na transformação isotérmica superior, o volume inicial é de 1l e o volume final é de 5l. Calcule as quantidades de calor permutadas entre o sistema termodinâmico e as fontes quente e fria. Calcule o trabalho realizado ao longo de um ciclo.

#### Resolução



**Figura 3.1:** Ciclo de Carnot. As transformações  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$  são isotérmicas, e as transformações  $\overline{BC}$  e  $\overline{DA}$  são adiabáticas. É dito, no enunciado, que  $V_A = 1\text{l}$  e  $V_B = 5\text{l}$ .

Visto que duas das transformações que ocorrem no ciclo de Carnot são adiabáticas, só as outras duas é que contribuem para o cálculo da permutação de calor entre as fontes quente e fria. Assim sendo, para a transformação  $\overline{AB}$ , tem-se

$$\Delta W_q = -nRT_q \ln \left( \frac{V_B}{V_A} \right).$$

Mas, para uma transformação isotérmica,  $\Delta U = 0$ , portanto

$$\Delta Q_q = -\Delta W_q = nRT_q \ln \left( \frac{V_B}{V_A} \right) = 5261 \text{ J}.$$

Para determinar o calor envolvido na transformação  $\overline{CD}$ , o cálculo é semelhante ao anterior, no entanto é necessário ter o valor numérico da relação  $V_D/V_C$ .

$$T_q V_B^{\gamma-1} = T_f V_C^{\gamma-1} \Leftrightarrow V_C = \left( \frac{T_q}{T_f} \right)^{\frac{1}{1-\gamma}} V_B$$

$$T_f V_D^{\gamma-1} = T_q V_A^{\gamma-1} \Leftrightarrow V_D = \left( \frac{T_q}{T_f} \right)^{\frac{1}{1-\gamma}} V_A$$

Tirando partido das relações obtidas anteriormente obtém-se

$$\frac{V_D}{V_C} = \frac{V_A}{V_B}.$$

Por um raciocínio análogo ao que se fez para calcular  $\Delta Q_q$  tem-se

$$\Delta Q_f = -\Delta W_f = nRT_f \ln \left( \frac{V_D}{V_C} \right) = nRT_f \ln \left( \frac{V_A}{V_B} \right) = -3923 \text{ J}.$$

Para calcular o trabalho realizado ao longo de um ciclo basta somar o trabalho efetuado por cada um dos ramos. Para os ramos  $\overline{BC}$  e  $\overline{DA}$

$$\Delta W_{\text{adiabático}} = nc_V(T_1 - T_2) \Rightarrow \Delta W_{\overline{BC}} + \Delta W_{\overline{DA}} = nc_V(T_f - T_q + T_q - T_f) = 0.$$

Portanto, o trabalho realizado ao longo de um ciclo vem apenas

$$\Delta W = \Delta W_q + \Delta W_f = -5261 + 3923 = -1338 \text{ J}.$$

2. Calcule o **rendimento ideal** de um motor térmico trabalhando entre as temperaturas de **20 °C** e **200 °C**.

**Resolução**

O rendimento ideal de um motor térmico nas condições do enunciado é um motor que descreve ciclos de Carnot. Assim sendo, o rendimento é

$$\eta_C = 1 - \frac{T_f}{T_q} = 1 - \frac{20 + 273.15}{200 + 273.15} \approx 0.38.$$

3. A temperatura da radiação solar que chega à Terra é de **6000 K**.
- (a) Qual é a **eficiência máxima** de um painel solar que está à temperatura de **25 °C**? Considere que o painel solar **funciona aproximadamente como uma máquina térmica de Carnot**.

**Resolução**

Se o painel solar descreve ciclos de Carnot, então a eficiência vem

$$\eta_C = 1 - \frac{T_f}{T_q} = 1 - \frac{25 + 273.15}{6 \times 10^3} \approx 95 \, \%.$$

- (b) Se a energia da radiação solar incidente é de **100 J**, qual é a **quantidade máxima de energia que o painel solar pode fornecer**?

**Resolução**

Uma vez que o rendimento do painel solar foi calculado na alínea anterior, para obter a quantidade máxima de energia que o painel solar pode fornecer nesta situação, multiplica-se a energia das ondas incidentes pela eficiência do mesmo:

$$E_{\text{máxima}} = \eta_C E_{\text{incidente}} = 95 \, \text{J}.$$

4. Uma máquina térmica descreve um **ciclo de Carnot**, entre as temperaturas de **80 °C** e **200 °C**, mas atinge apenas 20 % da sua eficiência máxima. Calcule a energia que é necessário fornecer à máquina para que o trabalho realizado seja de  $10^4 \, \text{J}$ .

**Resolução**

Sabe-se que o rendimento máximo de uma máquina de Carnot é

$$\eta_C = 1 - \frac{T_f}{T_q}$$

que neste caso é

$$\eta_C = 1 - \frac{80 + 273.15}{200 + 273.15}.$$

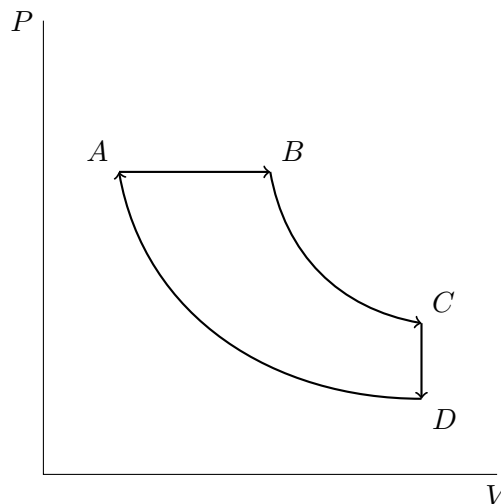
É dito no enunciado, no entanto, que apenas 20 % deste rendimento é atingido, portanto a expressão que relaciona energia fornecida à máquina com o trabalho realizado pela mesma é

$$\Delta W = \frac{E_{\text{fornecida}}}{\eta_C \times 0.2}.$$

Aplicando a igualdade anterior aos dados do problema obtém-se

$$\Delta W = \frac{10^4}{0.05} = 0.2 \text{ MJ}.$$

5. Um motor a diesel é descrito pelo ciclo termodinâmico indicado na figura 3.2. Determine os fluxos de calor da fonte quente e da fonte fria. Determine o rendimento do motor a diesel.



**Figura 3.2:** Ciclo termodinâmico de um motor a diesel. A transformação  $\overline{AB}$  é isobárica, a transformação  $\overline{CD}$  é isocórica e as transformações  $\overline{BC}$  e  $\overline{DA}$  são adiabáticas.

### Resolução

Uma vez que as transformações  $\overline{BC}$  e  $\overline{DA}$  são adiabáticas, não existe trocas de calor entre o sistema e o exterior. Assim, As trocas de calor dão-se nos

processos  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$ . Pelas fórmulas 3.7 e 3.9 do formulário, vem que

$$Q_q = nc_P(T_B - T_A)$$

e que

$$Q_f = nc_V(T_D - T_C).$$

O rendimento define-se

$$\eta = 1 - \frac{|Q_f|}{|Q_q|}$$

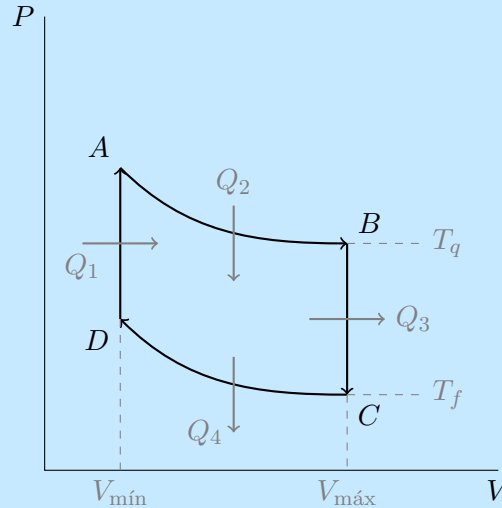
portanto, para este caso resulta que

$$\eta = 1 - \frac{nc_V|T_D - T_C|}{nc_P|T_B - T_A|} = 1 - \frac{c_V}{c_P} \frac{T_C - T_D}{T_B - T_A} = 1 - \frac{1}{\gamma} \frac{T_C - T_D}{T_B - T_A}.$$

6. Uma **máquina térmica de Stirling** é descrita por um ciclo termodinâmico constituído por **duas isotérmicas e duas isocóricas**. Determine a sua **eficiência**.

### Resolução

De acordo com a descrição do enunciado, o ciclo termodinâmico da máquina de Stirling deverá ser como o representado na figura 3.3.



**Figura 3.3:** Ciclo termodinâmico descrito no enunciado da questão 6. As transformações  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$  são isotérmicas e as transformações  $\overline{BC}$  e  $\overline{DA}$  são isocóricas. Na transformação  $\overline{AB}$  o sistema fornece trabalho ao exterior e na transformação  $\overline{DA}$  a energia interna do sistema aumenta.

Por definição, a eficiência de um ciclo termodinâmico é

$$\eta = \frac{W}{Q_q} = \frac{Q_q - Q_f}{Q_q} = \frac{Q_1 + Q_2 - Q_3 - Q_4}{Q_1 + Q_2}.$$

No entanto, pela expressão 3.7 do formulário, sabe-se que

$$Q_1 = nc_V(T_q - T_f) = Q_3$$

pelo que a eficiência vem, simplificada,mente,

$$\eta = \frac{Q_2 - Q_4}{Q_1 + Q_2}.$$

Por outro lado, as transformações  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$  são isotérmicas, e pela igualdade 3.2 do formulário vem que

$$Q_k = -W_k = nRT_k \ln \left( \frac{V_{\text{máx}}}{V_{\text{mín}}} \right), \quad k = 2, 4.$$

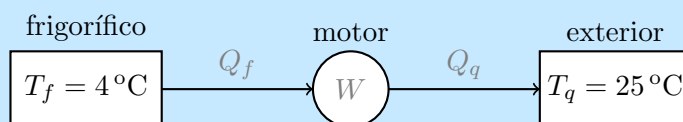
Assim sendo, a eficiência vem definida como

$$\eta = \frac{nRT_q \ln \left( \frac{V_{\text{máx}}}{V_{\text{mín}}} \right) - nRT_f \ln \left( \frac{V_{\text{máx}}}{V_{\text{mín}}} \right)}{nc_V(T_q - T_f) + nRT_q \ln \left( \frac{V_{\text{máx}}}{V_{\text{mín}}} \right)} = \frac{R(T_q - T_f) \ln \left( \frac{V_{\text{máx}}}{V_{\text{mín}}} \right)}{c_V(T_q - T_f) + RT_q \ln \left( \frac{V_{\text{máx}}}{V_{\text{mín}}} \right)}.$$

7. O interior de um frigorífico está à temperatura de  $4^\circ\text{C}$ . A temperatura do exterior é de  $25^\circ\text{C}$ . No interior do frigorífico é colocado um litro de água à temperatura de  $25^\circ\text{C}$ . Calcule a quantidade de trabalho que é necessário fornecer ao sistema para que a água fique à temperatura do frigorífico. Assuma que a máquina térmica descreve um ciclo de Carnot. O calor específico da água é  $c_P = 4181 \text{ J kg}^{-1} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ .

### Resolução

O esquema de funcionamento do frigorífico descrito no enunciado ilustra-se na figura 3.4.



**Figura 3.4:** Esquema de funcionamento do frigorífico descrito no enunciado.

Sabe-se que

$$W = Q_q - Q_f \Leftrightarrow Q_q = W + Q_f$$

e que

$$\eta = \frac{Q_f}{W} = \frac{Q_f}{Q_f - Q_q}.$$

Por outro lado, o rendimento do frigorífico é maximizado pelo rendimento de Carnot, ou seja,

$$\eta \leq \frac{T_f}{T_q - T_f}.$$

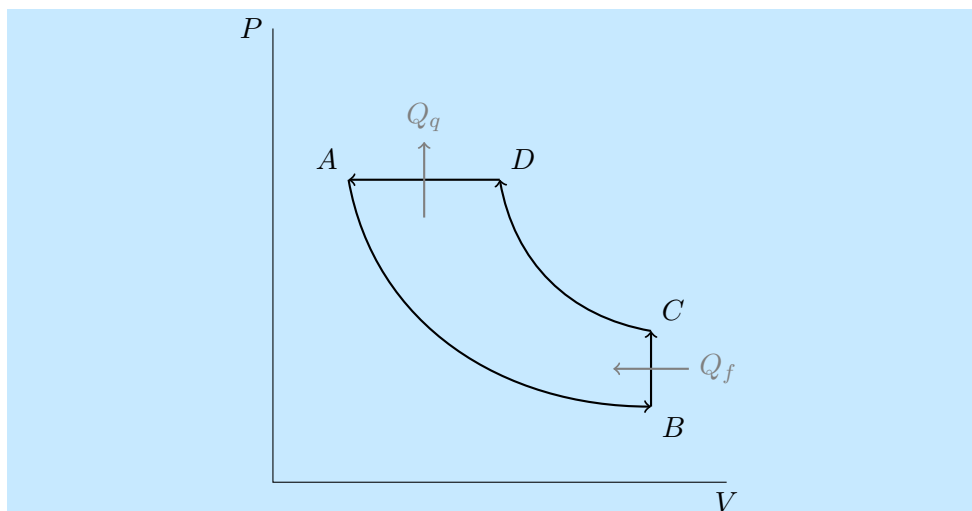
Assim, vem que

$$W \geq \frac{Q_{\text{água}}}{\eta} = \frac{T_q - T_f}{T_f} m_{\text{água}} c_{P_{\text{água}}} (T_q - T_f) \approx 6.66 \times 10^3 \text{ J}.$$

8. O sistema de refrigeração de um frigorífico é constituído por **0.2 mol** de um gás, o isobutano ( $C_4H_{10}$ ). Durante o ciclo termodinâmico reversível do frigorífico, o isobutano começa por estar sujeito a uma **expansão adiabática**, seguindo-se um **aquecimento isocórico**, uma **compressão adiabática** e, finalmente, **o isobutano é comprimido e arrefecido isobaricamente**. No total, o ciclo termodinâmico é constituído por **quatro processos termodinâmicos elementares** e o **ciclo é percorrido no sentido contrário ao das rotações dos ponteiros do relógio**. Considere que a temperatura de funcionamento do frigorífico é de **4 °C** e que a **temperatura do exterior é de 25 °C**. A **pressão máxima do isobutano na tubagem do frigorífico é de 4 bar** e a **temperatura do isobutano no início da compressão adiabática é de 8 °C**. O isobutano é caracterizado pelas constantes termodinâmicas,  **$c_V = 85.85 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$**  e  **$\gamma = 1.097$** .
- (a) Faça o **diagrama ( $V, P$ )** do processo termodinâmico cíclico descrito. Indique os **sentidos dos percursos** e calcule as **pressões**, as **temperaturas** e os **volumes** no início e no fim dos quatro processos termodinâmicos elementares.

### Resolução

O ciclo termodinâmico descrito no enunciado ilustra-se na figura 3.5.



**Figura 3.5:** Ciclo termodinâmico do enunciado da questão 8.

As temperaturas, pressões e volumes nos pontos pedidos vêm calculados:

- (A) Sabe-se que  $T_A = 25^\circ\text{C}$  e que  $P_A = 4 \times 10^5 \text{ Pa}$ . Portanto, pela fórmula geral dos gases ideias,

$$V_A = \frac{nRT_A}{P_A} \approx 1.24 \text{ l.}$$

- (B) A temperatura em  $B$  é  $4^\circ\text{C}$ , e a transformação  $\overline{AB}$  é adiabática, pelo que  $TV^{\gamma-1} = C^{te}$ .

$$T_A V_A^{\gamma-1} = T_B V_B^{\gamma-1} \Leftrightarrow V_B = V_A \left( \frac{T_A}{T_B} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \approx 2.63 \text{ l}$$

Mais uma vez, pela reação dos gases ideias,

$$P_B = \frac{nRT_B}{V_B} \approx 1.73 \text{ atm.}$$

- (C) Sabe-se que  $V_C = V_B = 2.63 \text{ l}$  e que  $T_C = 8^\circ\text{C}$ . Pela equação dos gases ideias,

$$P_C = \frac{nRT_C}{V_C} \approx 1.75 \text{ atm.}$$

- (D) Tem-se que  $P_D = P_A = 4 \times 10^5 \text{ Pa}$ . Como a transformação  $\overline{CD}$  é adiabática, vem que  $PV^\gamma = C^{te}$ .

$$P_C V_C^\gamma = P_D V_D^\gamma \Leftrightarrow V_D = V_C \left( \frac{P_C}{P_D} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \approx 1.26 \text{ l}$$



Finalmente, pela equação dos gases ideais tira-se que

$$T_D = \frac{P_D V_D}{nR} \approx 28.9^\circ\text{C}.$$

- (b) Calcule as quantidades de calor e de trabalho trocadas entre o sistema termodinâmico e o exterior, nas várias transformações elementares do ciclo. No diagrama do ciclo termodinâmico, indique os sentidos dos fluxos de calor e de trabalho.

### Resolução

Pelas deduções feitas no formulário para os diferentes tipos de transformações, calculam-se os trabalhos dos diferentes ramos do ciclo:

$$W_{AB} = \Delta U_{AB} = \int_{T_i}^{T_f} n c_V dT = n c_V \Delta T_{AB} = -361 \text{ J},$$

$$W_{BC} = - \int_{V_i}^{V_f} P dV = 0,$$

$$W_{CD} = \Delta U_{CD} = \int_{T_i}^{T_f} n c_V dT = n c_V \Delta T_{CD} = 358.9 \text{ J},$$

$$W_{DA} = - \int_{V_i}^{V_f} P dV = -P(V_f - V_i) = 8 \text{ J}.$$

Para determinar os calores trocados entre a fonte quente e a fonte fria tira-se partido do facto de apenas haver trocas de calor nos processos isobárico e isocórico:

$$|Q_q| = n c_P (T_D - T_A) = 73.46 \text{ J},$$

$$|Q_f| = n c_V (T_C - T_B) = 68.68 \text{ J}.$$

- (c) Em condições normais de funcionamento do frigorífico, são percorridos 1000 ciclos termodinâmicos por hora, e o preço da energia elétrica é de 15 centimos por kWh. Calcule a potência do frigorífico. Como o custo do funcionamento do frigorífico é devido ao custo da energia que alimenta o motor que comprime o gás de refrigeração, calcule o custo diário de manutenção do frigorífico.

### Resolução

O trabalho que se considera “fornecido” ao ciclo é aquele que o exterior exerce sobre os sistema. O trabalho fornecido pelo sistema não deve ser

Note-se que neste exercício é fornecido apenas o  $c_V$  do isobutano e que na sua resolução é necessário conhecer também o  $c_P$ . O  $c_P$  pode ser obtido de uma de duas formas:

$$c_P = \gamma c_V$$

ou

$$c_P = R + c_V.$$

contabilizado, já que não pode ser aproveitado para o funcionamento da máquina. Desta forma,

$$W_{\text{fornecido}} = W_{CD} + W_{DA} = 366.9 \text{ J.}$$

A potência do frigorífico é

$$P = \frac{1000}{60^2} \times W_{\text{fornecido}} = 101.92 \text{ W}$$

e a energia gasta diariamente, em  $kW h$  é

$$E_{\text{diária}} = P \times 10^{-3} \times 24.$$

O custo diário de manutenção do frigorífico é, portanto,

$$C = E_{\text{diária}} \times 0.15 \approx 0.37 \text{ €}.$$

- (d) Calcule a eficiência do ciclo termodinâmico do frigorífico.

### Resolução

A eficiência do frigorífico, por definição, é

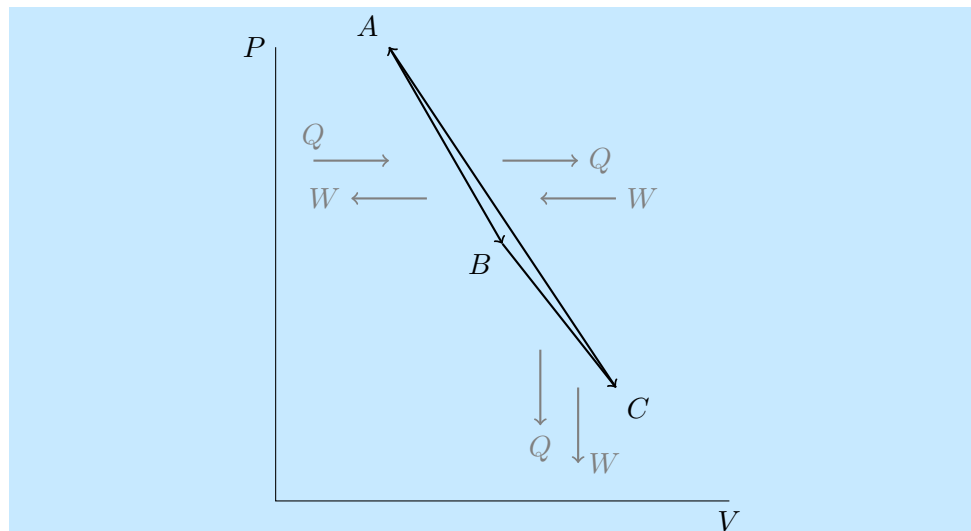
$$\eta = \frac{Q_f}{W} = \frac{Q_f}{W_{AB} + W_{CD} + W_{DA}} \approx 11.6.$$

9. Num sistema termodinâmico, 2 mol de um gás ideal diatômico estão sujeitos a uma transformação cíclica reversível. Num diagrama  $(V, P)$ , o processo termodinâmico tem a forma triangular. Inicialmente, o gás está à pressão de 1.013 bar e à temperatura de 300 K, sendo depois aquecido até se atingir a temperatura de 350 K, ocupando o dobro do volume inicial. Em seguida, o gás é arrefecido até atingir a temperatura de 250 K, ocupando o triplo do volume inicial. Finalmente, o sistema é aquecido até chegar às condições iniciais.

- (a) Calcule as pressões e os volumes no início e no fim dos três processos termodinâmicos elementares. Faça o diagrama  $(V, P)$  do processo termodinâmico cíclico descrito e indique os sentidos dos percursos no diagrama  $(V, P)$ .

### Resolução

O ciclo termodinâmico descrito no enunciado ilustra-se na figura 3.6.



**Figura 3.6:** Ciclo termodinâmico do enunciado da questão 9.

As temperaturas, pressões e volumes pedidos em cada um dos pontos,  $A$ ,  $B$  e  $C$  calculam-se de seguida:

- (A) Sabe-se que a pressão em  $A$  é  $101300 \text{ Pa}$  e a temperatura é  $300 \text{ K}$ . Pela equação dos gases ideais resulta que

$$V_A = \frac{nRT_A}{P_A} \approx 49.25 \text{ l.}$$

- (B) Em  $B$  é dito que  $T_B = 350 \text{ K}$  e que  $V_B = 2V_A = 98.49 \text{ l}$ , portanto

$$P_B = \frac{nRT_B}{V_B} \approx 59092 \text{ Pa.}$$

- (C) Finalmente, em  $C$  tem-se a informação de que  $T_C = 250 \text{ K}$  e que  $V_C = 3V_A = 147.71$  pelo que, novamente pela relação dos gases ideais,

$$P_C = \frac{nRT_C}{V_C} \approx 28139 \text{ Pa.}$$

- (b) Calcule as quantidades de calor e de trabalho trocadas com o exterior nas várias transformações elementares do ciclo termodinâmico. No diagrama do ciclo termodinâmico, indique os sentidos dos fluxos de calor e de trabalho.

Note-se que o  $c_V$  de um gás ideal diatômico é  $5/2R$ .

### Resolução

Como se trata de um gás ideal é verdade que  $\Delta U = \Delta Q + \Delta W = nc_V \Delta T$ .

Por outro lado, por definição, o trabalho realizado por u gás define-se

$$\Delta W = - \int_{V_i}^{V_f} P \, dV.$$

Neste caso a pressão varia linearmente com o volume, portanto o integral será o integral de uma reta da forma

$$P_k = m_n V_k + b_n, \quad k = A, B, C, \quad n = \overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CA}.$$

De seguida calculam-se as quantidades de calor e de trabalho trocadas entre o sistema e o exterior nos vários ramos do ciclo termodinâmico.

$\overline{AB}$ : Os parâmetros da reta que passa em  $A$  e em  $B$  calculam-se

$$m_{\overline{AB}} = \frac{P_B - P_A}{V_B - V_A} = -857015,$$

$$b_{\overline{AB}} = P_A - m_{\overline{AB}} V_A = 143508.$$

O trabalho ao longo do caminho  $\overline{AB}$  vem:

$$\Delta W_{\overline{AB}} = - \int_{V_A}^{V_B} [m_{\overline{AB}} V + b_{\overline{AB}}] \, dV = -3949 \, \text{J}.$$

Consequentemente, para o calor tem-se

$$Q_{\overline{AB}} = \Delta U_{\overline{AB}} - \Delta W_{\overline{AB}} = nc_V \Delta T_{\overline{AB}} - \Delta W_{\overline{AB}} = 6028 \, \text{J}.$$

$\overline{BC}$ : Os parâmetros da reta que passa em  $B$  e em  $C$  calculam-se

$$m_{\overline{BC}} = \frac{P_C - P_B}{V_C - V_B} = -628487,$$

$$b_{\overline{BC}} = P_B - m_{\overline{BC}} V_B = 120992.$$

O trabalho ao longo do caminho  $\overline{BC}$  vem:

$$\Delta W_{\overline{BC}} = - \int_{V_B}^{V_C} [m_{\overline{BC}} V + b_{\overline{BC}}] \, dV = -2147 \, \text{J}.$$

Consequentemente, para o calor tem-se

$$Q_{\overline{BC}} = \Delta U_{\overline{BC}} - \Delta W_{\overline{BC}} = nc_V \Delta T_{\overline{BC}} - \Delta W_{\overline{BC}} = -2010 \, \text{J}.$$

$\overline{CA}$ : Os parâmetros da reta que passa em  $C$  e em  $A$  calculam-se

$$m_{\overline{CA}} = \frac{P_A - P_C}{V_A - V_C} = -742751,$$

$$b_{\overline{CA}} = P_A - m_{\overline{CA}}V_A = 137881.$$

O trabalho ao longo do caminho  $\overline{CA}$  vem:

$$\Delta W_{\overline{CA}} = - \int_{V_C}^{V_A} [m_{\overline{CA}}V + b_{\overline{CA}}] dV = 6374 \text{ J}.$$

Consequentemente, para o calor tem-se

$$Q_{\overline{CA}} = \Delta U_{\overline{CA}} - \Delta W_{\overline{CA}} = nc_V \Delta T_{\overline{CA}} - \Delta W_{\overline{CA}} = -4295 \text{ J}.$$

- (c) Calcule a **eficiência** do ciclo termodinâmico.

### Resolução

Para calcular a eficiência do ciclo termodinâmico utiliza-se a definição de rendimento de uma bomba de calor:

$$\eta = \frac{Q_q}{W}.$$

Neste caso tem-se

$$\eta = \frac{Q_{\overline{AB}}}{W_{\overline{AB}} + W_{\overline{BC}} + W_{\overline{CA}}} \approx 21.7.$$

10. Calcule a **energia necessária para extrair uma caloria de calor** a um corpo a **0°C** quando a temperatura ambiente é de **20°C**. Assuma que a máquina térmica descreve um **ciclo de Carnot**.

### Resolução

Nesta situação, assume-se que a máquina térmica é uma bomba de calor. O rendimento de uma bomba de calor de Carnot é definido como

$$\eta_{\text{B. calor}}^{\text{Carnot}} = \frac{T_q}{T_q - T_f} \approx 14.66.$$

Por outro lado, o rendimento de uma bomba de calor também é

$$\eta_{\text{B. calor}} = \frac{Q_q}{W}$$

Há que ter cuidado em converter todas as unidades de energia para unidades do S.I..

pelo que o trabalho para extrair uma caloria de calor ao corpo a  $0^\circ\text{C}$  vem

$$W = \frac{1 \text{ cal}}{\eta_{\text{B. calor}}^{\text{Carnot}}} \approx 0.285 \text{ J}.$$

11. O calor específico de um sólido é  $c_P = 125.48 \text{ J kg}^{-1}\text{K}^{-1}$ . Determine a **variação de entropia** quando **1 kg** desse sólido é aquecido de  $0^\circ\text{C}$  para  $100^\circ\text{C}$ .

### Resolução

Sabe-se que  $\Delta S \geq 0$  e que  $dS = dQ/T$ . Admite-se que o sólido é aquecido a pressão constante, pelo que

$$\Delta S = \int_{T_i}^{T_f} \frac{mc_P}{T} dT = mc_P \ln \left( \frac{T_f}{T_i} \right) \approx 39.14 \text{ J K}^{-1}.$$

12. Calcule a **variação da entropia** ao longo de um **ciclo de Otto**.

### Resolução

Na resolução deste exercício, as referências aos processos elementares do ciclo de Otto remeterão para a figura 3.11 do formulário.

No ciclo de Otto, apenas há variação de calor a ser considerada nos processos  $\overline{EB}$  e  $\overline{CD}$  já que as transformações  $\overline{BC}$  e  $\overline{DE}$  são adiabáticas e não há trocas de calor e as transformações  $\overline{AB}$  e  $\overline{BA}$  admitem trocas de trabalho e calor inversas, já que são a mesma transformação mas em sentidos opostos.

Desta forma resulta que

$$\begin{aligned} \Delta S &= \int \frac{1}{T} dT \\ &= \underbrace{\frac{1}{T_D}}_{T_D} \int_{T_C}^{T_D} nc_V dT - \underbrace{\frac{1}{T_f}}_{T_B} \int_{T_E}^{T_B} nc_V dT \\ &= \frac{1}{T_D} nc_V (T_D - T_C) - \frac{1}{T_B} nc_V (T_B - T_E) \\ &= nc_V \left[ 1 - \frac{T_C}{T_D} - 1 + \frac{T_E}{T_B} \right] \\ &= nc_V \left[ \frac{T_E}{T_B} - \frac{T_C}{T_D} \right]. \end{aligned}$$

13. Calcule a **variação de entropia de uma mole de gás ideal**, quando este se **expande isotermicamente para duas vezes o seu volume**.

**Resolução**

Mais uma vez, parte-se da igualdade  $dS = dQ/T$ . Como o gás é ideal, vem que

$$dU = dQ + dW \Leftrightarrow dQ = dU - dW = nc_V dT + P dV.$$

Pelas considerações anteriores, tira-se que

$$\Delta S = \int_{T_i}^{T_f} \frac{nc_V}{T} dT + \int_{V_i}^{V_f} \frac{nRT}{VT} dV.$$

Note-se que no segundo integral utilizou-se a relação dos gases ideais para exprimir a pressão em função da temperatura e do volume. É dito no enunciado que a transformação é isotérmica, pelo que o resultado do primeiro integral é 0, e assim resulta que

$$\Delta S = nR \ln \left( \frac{V_f}{V_i} \right) = nR \ln(2) = 1 \times R \times \ln(2) \approx 5.76 \text{ J K}^{-1}.$$

14. Qual a **variação de entropia na vaporização de 1 l de água**? Considere que todo o processo ocorre a **100 °C**, e  **$L_e = 2.26 \times 10^6 \text{ J kg}^{-1}$** .

**Resolução**

Uma vez que a mudança de estado se dá a temperatura constante, a fórmula geral  $dS = dQ/T$  vem particularizada como

$$\Delta S = \frac{\Delta Q}{T} = \frac{mL_e}{T} \approx 6057 \text{ J K}^{-1}.$$

15. Qual a **variação da entropia** quando se aquece **2 l de água a 20 °C para 80 °C**, a **pressão constante** ( **$c_P = 75.29 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$** )?

**Resolução**

$$dU = dQ + dW \Leftrightarrow dQ = dU - dW = nc_P dT + P dV.$$

No entanto, como a transformação se dá a pressão constante, a variação de

entropia vem simplesmente

$$\Delta S = \int_{T_i}^{T_f} \frac{n c_P}{T} dT = n c_P \ln \left( \frac{T_f}{T_i} \right) \approx 1558 \text{ J K}^{-1}.$$

16. Um recipiente isolado do exterior contém dois compartimentos com volumes iguais e separados por uma parede impermeável. Um dos compartimentos contém 0.5 mol de  $H_2$  e o outro contém 0.5 mol de  $O_2$ . O sistema está à pressão de 1 atm e à temperatura de 20°C. Qual a variação da entropia quando se remove a parede que separa os compartimentos internos?

### Resolução

Nesta situação, uma das abordagens possíveis é calcular as variações de entropia dos gases em separado e seguidamente obter-se a variação da entropia total como a soma das variações de entropias dos gases elementares. Assim

$$\Delta S_{H_2} = nR \ln \left( \frac{V_f}{V_i} \right) = \Delta S_{O_2}$$

Pelo que a entropia total vem

$$\Delta S_{\text{total}} = 2nR \ln \left( \frac{2V_i}{V_i} \right) = R \ln(2) \approx 5.763 \text{ J K}^{-1}.$$

17. Uma máquina térmica percorre um ciclo como indicado na figura 3.7. O sistema termodinâmico é constituído por 1 mol de um gás ideal monoatômico.
- (a) Calcule o trabalho realizado pelo sistema termodinâmico, ao longo de cada um dos percursos  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$  e  $\overline{CA}$ . Calcule o trabalho realizado pelo gás.

### Resolução

Pelas expressões 3.8 e 3.2 do formulário e pelo facto das transformações isocóricas terem trabalho associado nulo, seguidamente calculam-se os trabalhos associados às transformações elementares do ciclo termodinâmico representado na figura 3.7.

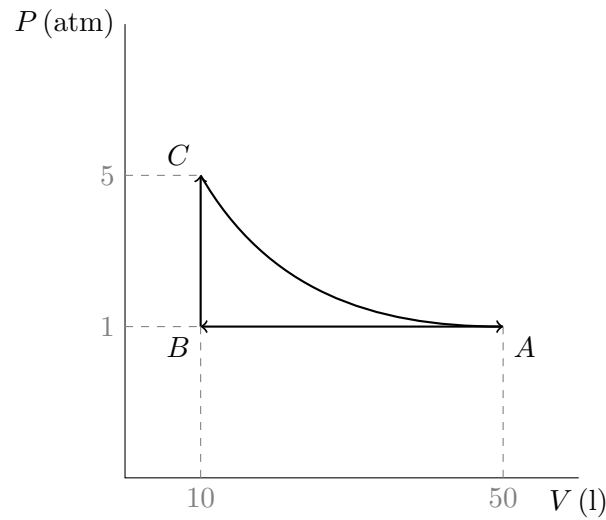
$$\overline{AB}: \Delta W_{\overline{AB}} = -P(V_f - V_i) = 4053 \text{ J};$$

$$\overline{BC}: \Delta V = 0 \Rightarrow W_{\overline{BC}} = 0 \text{ J};$$

$\overline{CA}$ : Primeiro é necessário calcular a temperatura a que esta transformação acontece:

$$T_C = \frac{P_C V_C}{nR} = 609.33 \text{ K} = T_A$$





**Figura 3.7:** Ciclo termodinâmico descrito no enunciado da pergunta 17. A transformação  $\overline{AB}$  é isobárica, a transformação  $\overline{BC}$  é isocórica e a transformação  $\overline{CA}$  é isotérmica.

portanto,

$$\Delta W_{\overline{CA}} = -nRT_C \ln \left( \frac{V_f}{V_i} \right) = -8154 \text{ J.}$$

O trabalho total do ciclo vem dado pela soma dos trabalhos elementares de cada transformação, pelo que

$$\Delta W = \Delta W_{\overline{AB}} + \Delta W_{\overline{BC}} + \Delta W_{\overline{CA}} = -4101 \text{ J.}$$

- (b) Calcule o **calor trocado** com o sistema termodinâmico, ao longo de cada um dos percursos  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$  e  $\overline{CA}$ .

### Resolução

O calor trocado entre o sistema e o exterior no percurso  $\overline{AB}$ , visto que a transformação é isobárica é

$$\Delta Q_{\overline{AB}} = n c_P \Delta T_{\overline{AB}}.$$

Para efetuar este cálculo é necessário calcular a temperatura em  $B$ .

$$T_B = \frac{P_B V_B}{nR} \approx 121.865 \text{ K.}$$

Note-se também que, para um gás ideal monoatômico,  $c_P = 5/2R$  e  $c_V = 3/2R$ . Assim, conclui-se que  $\Delta Q_{\overline{AB}} = -10132.5 \text{ J}$ .

O percurso  $\overline{BC}$  é isocórico, portanto

$$\Delta Q_{\overline{BC}} = nc_V \Delta T_{\overline{BC}} = 6079.5 \text{ J}.$$

Em relação ao calor trocado no ramo  $\overline{CA}$  há que notar que numa transformação isotérmica não há variação de energia interna, portanto

$$\Delta Q_{\overline{CA}} = -\Delta W_{\overline{CA}} = 8154 \text{ J}.$$

- (c) Calcule a **eficiência** do ciclo termodinâmico.

### Resolução

A eficiência do ciclo termodinâmico vem

$$\eta = \frac{|W|}{Q_q} = \frac{4101}{14234} = 0.29.$$

- (d) Calcule a **variação da entropia ao longo do caminho  $\overline{CA}$** .

### Resolução

Pelas deduções feitas em exercícios anteriores para o cálculo da variação da entropia de transformações que envolvem gases ideais vem, simplificada-

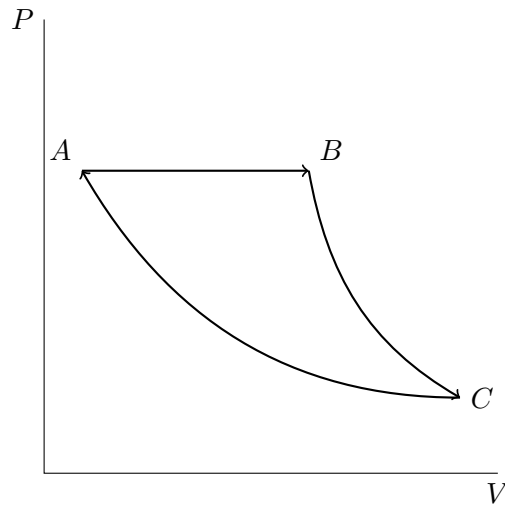
$$\Delta S = nR \ln \left( \frac{V_f}{V_i} \right) = 13.38 \text{ J K}^{-1}.$$

18. Uma turbina realiza trabalho de acordo com o ciclo de Brayon, indicado na figura 3.8. O circuito  $\overline{AB}$  é isobárico, o circuito  $\overline{BC}$  é adiabático e o circuito  $\overline{CA}$  é isotérmico.

- (a) Nos três caminhos elementares, determine as **quantidades de calor e de trabalho trocadas** entre o sistema termodinâmico e o exterior.

### Resolução

Pelas relações 3.2, 3.6, 3.7, 3.8 e 3.9 do formulário e considerações que lhes dizem respeito, as quantidades de trabalho e calor trocados nas transformações elementares do ciclo vêm:



**Figura 3.8:** Ciclo termodinâmico descrito no enunciado da pergunta 18. A transformação  $\overline{AB}$  é isobárica, a transformação  $\overline{BC}$  é adiabática e a transformação  $\overline{CA}$  é isotérmica.

$\overline{AB}$ :  $W_{\overline{AB}} = -P_A(V_B - V_A)$  e  $Q_{\overline{AB}} = nc_P(T_B - T_A)$ ;

$\overline{BC}$ :  $Q_{\overline{BC}} = 0$ , pois o processo é adiabático, e

$$W_{\overline{BC}} = \frac{P_C V_C - P_B V_B}{\gamma - 1};$$

$\overline{CA}$ : Como a transformação é isotérmica,  $\Delta U = 0 \Rightarrow \Delta Q = -\Delta W$ .

$$W_{\overline{CA}} = -nRT \ln \left( \frac{V_A}{V_C} \right) = -Q_{\overline{CA}}.$$

- (b) Determine a **eficiência reversível** do ciclo termodinâmico.

### Resolução

A eficiência reversível do ciclo termodinâmico vem definida

$$\eta_{\text{rev}} = 1 - \frac{|Q_f|}{Q_q} = 1 - \frac{nRT \ln \left( \frac{V_A}{V_C} \right)}{nc_P(T_B - T_A)}.$$

19. Determine a **energia de um gás ideal em função da entropia e do volume**.

**Resolução**

A variação da entropia de um gás ideal, como já foi visto, é

$$\Delta S = nc_V \ln \left( \frac{T_f}{T_i} \right) + nR \ln \left( \frac{V_f}{V_i} \right).$$

Quando se simplifica simbolicamente a equação anterior e se resolve em ordem a  $T$  resulta

$$S = nc_V \ln(T) + nR \ln(V) \Leftrightarrow T = e^{\frac{S - nR \ln(V)}{nc_V}}.$$

Substituindo o resultado obtido anteriormente na expressão da energia interna do gás vem

$$\begin{aligned} U &= nc_V T \\ &= nc_V e^{\frac{S - nR \ln(V)}{nc_V}} \\ &= nc_V e^{\frac{S}{nc_V}} \frac{1}{V^{\frac{R}{c_V}}} \\ &= nc_V e^{\frac{S}{nc_V}} V^{-\frac{c_P - c_V}{c_V}} \\ &= nc_V V^{1-\gamma} e^{\frac{S}{nc_V}}. \end{aligned}$$

## 3.2 Formulário

### Transformações

Quando se está a lidar com trabalho e calor no paradigma das transformações há que ter em conta, sempre, que

$$\Delta U = \Delta Q + \Delta W. \quad (3.1)$$

Os trabalhos e os calores dos diferentes tipos de transformações são calculados segundo as relações que se seguem:

#### Isotérmicas:

$$\begin{aligned} \Delta U = mc\Delta T &\Rightarrow \Delta U = 0 \\ &\Rightarrow \Delta Q = -\Delta W \end{aligned}$$

$$\Delta W = -nRT \ln \left( \frac{V_f}{V_i} \right) \quad (3.2)$$

$$= -nRT \ln \left( \frac{P_i}{P_f} \right) \quad (3.3)$$

#### Adiabáticas:

$$\Delta Q = 0 \Rightarrow \Delta U = \Delta W$$

Para um gás ideal tem-se que

$$\Delta U = \int nc_V dT \quad (3.4)$$

ou, equivalentemente,

$$\Delta U = \int nc_P dT - \int P dV. \quad (3.5)$$

Há ainda uma forma alternativa de calcular o trabalho de uma transformação adiabática que é deduzível das fórmulas já conhecidas:

$$\Delta W = \frac{1}{\gamma - 1} (P_f V_f - P_i V_i). \quad (3.6)$$

#### Isocóricas:

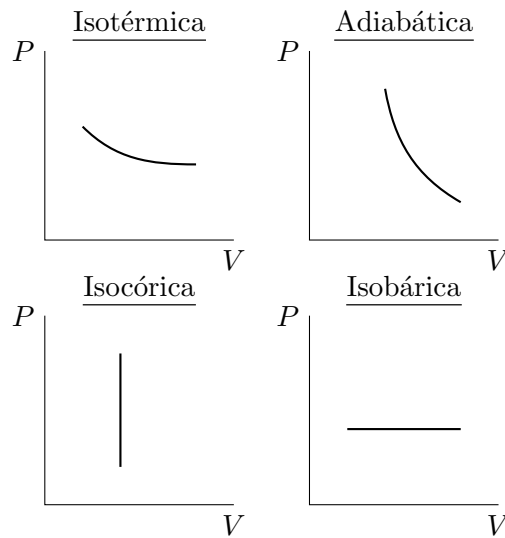
$$\Delta V = 0 \Rightarrow \Delta W = 0 \Rightarrow \Delta U = \Delta Q$$

$$\Delta Q = \Delta U = \int nc_V dT \quad (3.7)$$

#### Isobáricas:

$$\begin{aligned} \Delta W &= - \int P dV \\ &= -P(V_f - V_i) \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\Delta Q = \int nc_P dT \quad (3.9)$$



**Figura 3.9:** Representações típicas de algumas transformações num diagrama  $P, V$ .

### Máquinas térmicas (sentido direto)

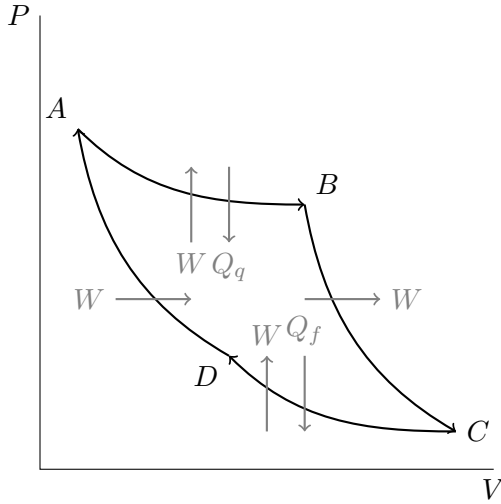
O rendimento de uma máquina térmica define-se como

$$\eta = \frac{|W|}{Q_q} = 1 - \frac{|Q_f|}{Q_q}. \quad (3.10)$$

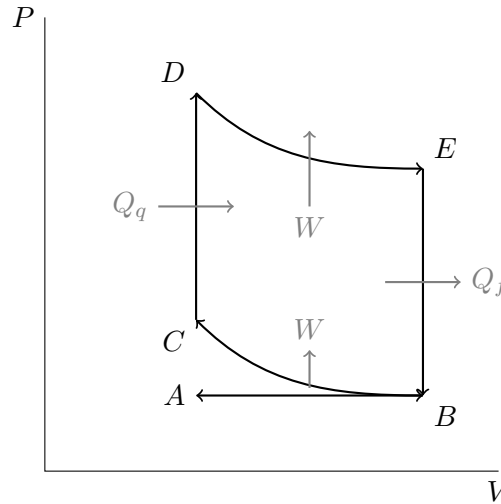
Para um ciclo de Carnot, o rendimento é calcula-se da seguinte forma: ideal, e, particularmente, escreve-se

$$\eta_C = 1 - \frac{T_f}{T_q}. \quad (3.11)$$

O ciclo de Carnot ilustra-se na figura 3.10



**Figura 3.10:** *Ciclo de Carnot.* As transformações  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$  são isotérmicas, e as transformações  $\overline{BC}$  e  $\overline{DA}$  são adiabáticas.



**Figura 3.11:** *Ciclo de Otto.*

Para um ciclo de Otto, o rendimento

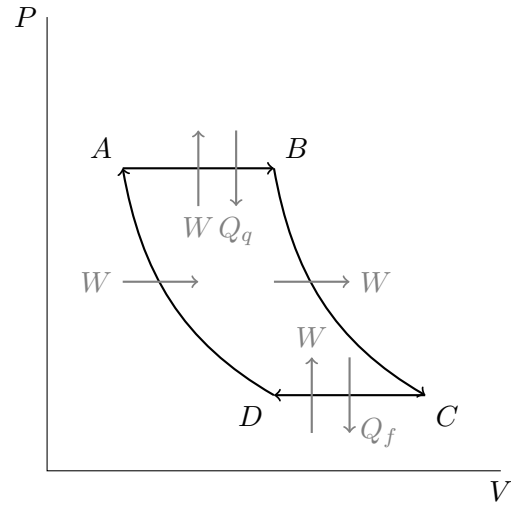
$$\eta_O = 1 - \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} = 1 - \frac{T_E - T_B}{T_D - T_C}. \quad (3.12)$$

O ciclo de Otto é descrito na figura 3.11.

Finalmente, tem-se o ciclo de Rankine, também chamado o ciclo de Brayon. Para este o rendimento ou eficácia define-se

$$\eta_R = 1 - \frac{T_C - T_D}{T_B - T_A}. \quad (3.13)$$

A figura 3.12 ilustra o ciclo de Rankine.



**Figura 3.12:** *Ciclo de Rankine ou ciclo de Brayon.*

### Máquinas térmicas (sentido inverso)

As máquinas térmicas de sentido inverso podem ser de dois tipos: **frigorífico** ou **bomba de calor**.

Para um frigorífico, o rendimento é

$$\eta_F = \frac{Q_f}{W} = \frac{Q_f}{|Q_q| - Q_f}. \quad (3.14)$$

O rendimento de um frigorífico que descreve um ciclo térmico ideal, isto é, o rendimento de um frigorífico de Carnot vem simplifiadamente

$$\eta_{FC} = \frac{T_f}{T_q - T_f}. \quad (3.15)$$

Por outro lado, para uma bomba de calor o rendimento é

$$\eta_B = \frac{|Q_q|}{W} = \frac{|Q_q|}{|Q_q| - Q_f}. \quad (3.16)$$

Se a bomba de calor descrever um ciclo de Carnot, então o rendimento ou eficácia fica, simplifiadamente,

$$\eta_{BC} = \frac{T_q}{T_q - T_f}. \quad (3.17)$$

**Nota 3.2.1.** Apesar das formas anteriormente descritas para calcular o rendimento ou eficácia, **podem ser definidas outras formas para calcular o rendimento**, dependendo das circunstâncias do problema.

Quanto às máquinas térmicas de sentido inverso, o facto de um ciclo inverso representar um frigorífico ou uma bomba de calor **depende do que for estipulado no enunciado**, pois o ciclo inverso por si só pode representar qualquer um deles. ■

Dependendo da natureza da transformação, a relação 3.18 pode vir simplifiada. Por exemplo, para uma transformação isocórica, a entropia vem

$$\Delta S = \int \frac{nc_P}{T} dT.$$

Para um **gás ideal**, especificamente, a entropia vem definida

$$\Delta S = \int \frac{nc_V}{T} dT + \int \frac{nRT}{VT} dV. \quad (3.19)$$

Para calcular a entropia inerente à **mudança de estado físico** recorre-se à equação da **entalpia**:

$$\Delta Q = mL \Rightarrow \Delta S = \frac{mL}{T}. \quad (3.20)$$

Finalmente, define-se rendimento reverso como

$$\eta_{\text{rev}} = 1 - \frac{|Q_f|}{Q_q}. \quad (3.21)$$

### Entropia

As unidades do *S.I.* da entropia são  $J K^{-1}$ .

Num sistema termodinâmico isolado, pelo segundo princípio da termodinâmica,  $\Delta S \geq 0$ . A entropia define-se

$$dS = \frac{dQ}{T}. \quad (3.18)$$





## Capítulo 4

# Física da estrutura da matéria (série 5)

### 4.1 Resolução de exercícios

1. O filamento de tungstênio de uma lâmpada incandescente está à temperatura de  $800^{\circ}\text{C}$ . Determine o comprimento de onda da radiação emitida mais intensa.

#### Resolução

Utilizando a lei de Wien, resulta que

$$\tilde{\lambda} = \frac{B}{T} \approx 2.7 \times 10^{-6} \text{ m} = 2.7 \mu\text{m}.$$

2. A temperatura à superfície do corpo humano é de  $36.5^{\circ}\text{C}$ . Determine o comprimento de onda da radiação emitida mais intensa. Determine a energia dissipada por radiação, por unidade de tempo e de área. A que região espectral pertence a radiação emitida?

#### Resolução

A radiação mais emitida pelo corpo, utilizando a lei de Wien calcula-se

$$\tilde{\lambda} = \frac{B}{T} \approx 9.358 \times 10^{-6} \text{ m} = 9.358 \mu\text{m}$$

que corresponde a radiação infravermelha.

Considerando que a emissividade do corpo humano é aproximadamente a de um corpo negro ( $e \approx 1$ ) tem-se que

$$\frac{dP}{dA} = u_{\text{rad}} = e\sigma T^4 \approx \sigma T^4 \approx 521.312 \text{ J s}^{-1} \text{ m}^{-2}.$$

3. O raio do Sol tem cerca de  $6.96 \times 10^8 \text{ m}$  e a energia radiada por unidade de tempo é de  $3.77 \times 10^{26} \text{ W}$ . Calcule a temperatura à superfície do Sol e o comprimento de onda da radiação mais intensa.

### Resolução

Sabe-se que

$$\frac{dP}{dA} = e\sigma T^4$$

pelo que fica óbvio que

$$P = A \frac{dP}{dA} = Ae\sigma T^4.$$

Resolvendo a equação anterior em ordem a  $T$ , vem que

$$T = \sqrt[4]{\frac{P}{A} \frac{1}{e\sigma}} \approx \sqrt[4]{\frac{P}{A} \frac{1}{\sigma}} = \sqrt[4]{\frac{P}{4\pi r_{\text{sol}}^2} \frac{1}{e\sigma}} \approx 5748.8 \text{ K}.$$

O comprimento da radiação mais intensa é dada pela lei de Wien:

$$\tilde{\lambda} = \frac{B}{T} \approx 504 \times 10^{-9} \text{ m} = 504 \text{ nm}.$$

4. O raio do Sol tem cerca de  $6.96 \times 10^8 \text{ m}$  e a energia radiada por unidade de tempo é de  $3.77 \times 10^{26} \text{ W}$ . A distância média do Sol à Terra é de  $1.496 \times 10^{11} \text{ m}$ . Qual é a pressão de radiação perto da superfície do Sol e à superfície da Terra? Compare este valor com a pressão atmosférica.

### Resolução

A pressão de radiação,  $\tilde{P}_{\text{rad}}$ , para um gás (atmosfera) é dada por

$$\tilde{P}_{\text{rad}} = \frac{1}{3} \frac{u_{\text{rad}}}{c} = \frac{1}{3} \frac{P_{\text{rad}}}{Ac}$$

em que  $P_{\text{rad}}$  é a energia radiada por unidade de tempo.

Assim, a pressão de radiação perto da superfície do sol é

$$\tilde{P}_{\text{rad}} = \frac{1}{2} \frac{P_{\text{rad}}}{4\pi r_{\text{sol}}^2 c} \approx 68.9 \times 10^{-3} \text{ Pa}$$

e a pressão de radiação do sol à superfície da Terra é

$$\tilde{P}_{\text{rad}} = \frac{1}{2} \frac{P_{\text{rad}}}{4\pi(r_{\text{sol}} + d_{TS})^2 c} \approx 1.5 \times 10^{-6} \text{ Pa} \ll 1 \text{ atm.}$$

5. Uma estação de rádio emite na frequência de **94.4 MHz** e o emissor tem uma potência de **100 kW**. Determine o número de **fotões radiados por segundo**. Determine a **pressão de radiação a 1 km e a 10 km** do emissor.

### Resolução

Para determinar o número de fotões radiados por segundo é necessário calcular a energia de cada fotão. Assim

$$W_{\text{fotão}} = hf = 6.26 \times 10^{-26} \text{ J.}$$

Consequentemente,

$$\frac{dN_{\text{fotões}}}{dt} = \frac{100 \times 10^3}{6.26 \times 10^{-26}} = 1.60 \times 10^{30} \text{ fotões s}^{-1}.$$

A pressão de radiação a 1 km e a 10 km do emissor vêm, respetivamente,

$$\tilde{P}_{\text{rad}} = \frac{1}{3} \frac{P}{4\pi r^2 c} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{P}_{\text{rad}}(1 \text{ km}) &= 8.85 \times 10^{-12} \text{ Pa} \\ \tilde{P}_{\text{rad}}(10 \text{ km}) &= 8.85 \times 10^{-14} \text{ Pa} \end{cases}.$$

6. O olho humano pode detectar um único fotão de luz visível. Uma lâmpada de iluminação noturna de **60 W** emite luz em todas as direções, com um comprimento de onda de **580 nm** (amarelo). A que **distância deve estar uma pessoa da lâmpada de modo a conseguir ver um fotão por segundo**? Assuma que o diâmetro da retina é **6 mm**.

### Resolução

Primeiramente calcula-se a quantidade de fotões emitidos por segundo pela lâmpada. Procedendo de forma análoga à da alínea anterior,

$$W_{\text{fotão}} = hf = \frac{hc}{\lambda} = 3.42 \times 10^{-19} \text{ J}$$

e

$$\frac{dN_{\text{fotões}}}{dt} = \frac{60}{W_{\text{fotão}}} = 1.75 \times 10^{20} \text{ fotões s}^{-1}.$$

Tendo isto, a quantidade de fotões radiados por unidade de tempo e unidade

de área vem dado em função da distância por

$$\frac{dN_{\text{fotões}}}{ds dA} = \frac{dN_{\text{fotões}}}{ds} \frac{1}{4\pi d^2}$$

pelo que, a distância a que deve estar o observador para poder ver apenas um fóton por segundo resulta da resolução da equação seguinte:

$$\frac{dN_{\text{fotões}}}{ds dA} A_{\text{retina}} = 1 \Leftrightarrow d = \sqrt{\frac{dN_{\text{fotões}}}{ds} \frac{A_{\text{retina}}}{4\pi}} = 1.99 \times 10^7 \text{ m.}$$

7. Numa noite de Verão, uma pessoa resolveu dormir ao relento. A temperatura durante a noite foi  $26^\circ\text{C}$ , a área do corpo voltada para cima era aproximadamente  $0.9 \text{ m}^2$  e a emissividade da pessoa com a sua roupa é  $e = 0.8$ .

- (a) Calcule a energia perdida pela pessoa por unidade de tempo.

### Resolução

A quantidade de energia perdida pela pessoa por unidade de tempo é obtida subtraindo à energia fornecida pela pessoa ao ambiente a energia fornecida pelo ambiente à pessoa. Portanto,

$$\begin{aligned} u_{\text{rad}} &= u_{\text{radcorpo}} - u_{\text{radambiente}} \\ &= A_{\text{corpo}} e_{\text{corpo}} \sigma T_{\text{corpo}}^4 - A_{\text{ambiente}} e_{\text{corpo}} \sigma T_{\text{ambiente}}^4 \\ &= A_{\text{corpo}} e_{\text{corpo}} \sigma T_{\text{corpo}}^4 - \frac{A_{\text{corpo}}}{A_{\text{ambiente}}} A_{\text{ambiente}} e_{\text{corpo}} \sigma T_{\text{ambiente}}^4 \\ &= A_{\text{corpo}} e_{\text{corpo}} \sigma (T_{\text{corpo}}^4 - T_{\text{ambiente}}^4) \\ &= 48.38 \text{ W} \end{aligned}$$

- (b) Para dormir confortavelmente ao relento, a energia radiada pela pessoa tem de ser compensada pela energia fornecida pelo seu metabolismo. Como o metabolismo da pessoa fornece  $50 \text{ W}$  de energia, determine a temperatura de equilíbrio da pessoa ao fim de algumas horas ao relento.

### Resolução

A energia fornecida pela pessoa ao ambiente é a energia produzida pelo seu metabolismo. Assim a energia radiada pelo corpo vem

$$P_{\text{metabolismo}} = e_{\text{corpo}} A_{\text{corpo}} (\tilde{T}_{\text{corpo}}^4 - T_{\text{ambiente}}^4).$$

Resolvendo a equação anterior em ordem a  $T_{\text{corpo}}$  obtém-se

$$\tilde{T}_{\text{corpo}} = \sqrt[4]{\frac{P_{\text{metabolismo}}}{e_{\text{corpo}} A_{\text{corpo}} \sigma}} + T_{\text{ambiente}} = 36.83^\circ\text{C}.$$

- (c) Qual teria de ser a emissividade da pessoa para que a noite ao relento fosse mais confortável? Um modo de diminuir a emissividade é utilizar agasalhos suficientes.

### Resolução

Para que a noite ao relento fosse mais confortável a energia radiada teria de ser igual à energia fornecida pelo metabolismo, desta forma,

$$P_{\text{metabolismo}} = \tilde{e} A_{\text{corpo}} \sigma (T_{\text{corpo}}^4 - T_{\text{ambiente}}^4).$$

Resolvendo a equação anterior em ordem a  $\tilde{e}$  obtém-se

$$\tilde{e} = \frac{P_{\text{metabolismo}}}{A_{\text{corpo}} \sigma (T_{\text{corpo}}^4 - T_{\text{ambiente}}^4)} \approx 0.83.$$

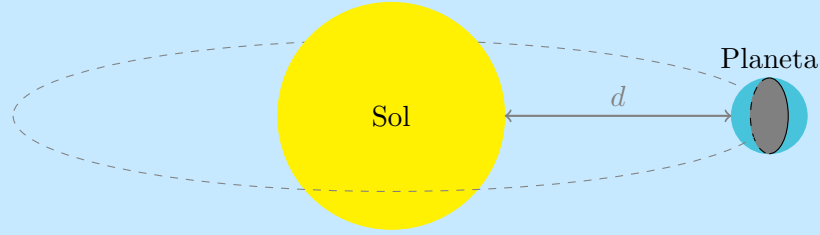
A situação anteriormente descrita é irrealista, como se pode verificar pelo facto de, pelos cálculos, ser expectável que a pessoa a dormir ao relento aqueça durante a noite. Por este motivo considere-se a situação em que o campista só troca energia diretamente com a exosfera, cuja temperatura é  $-5^\circ\text{C}$ . Os procedimentos para resolver as subálneas deste problema nesta nova situação mantêm-se, a única alteração é que, nesta nova situação,  $T_{\text{ambiente}} = -5^\circ\text{C}$ . Os resultados numéricos desta nova situação listam-se abaixo.

- (a)  $P_{\text{rad}} = 164.26 \text{ W}$ ;
- (b)  $\tilde{T}_{\text{corpo}} = 9.64^\circ\text{C}$ ;
- (c)  $\tilde{e} = 0.24$ .

8. O raio do Sol tem cerca de  $6.96 \times 10^8 \text{ m}$ , o raio médio de Vénus é de  $6.52 \times 10^6 \text{ m}$  e o raio da Terra é de  $6.378 \times 10^6 \text{ m}$ . A energia radiada pelo Sol por unidade de tempo é de  $3.77 \times 10^{26} \text{ W}$ . A distância média do Sol a Vénus é de  $1.082 \times 10^{11} \text{ m}$  e a distância média do Sol à Terra é de  $1.496 \times 10^{11} \text{ m}$ . Supondo que no sistema solar se estabelece um equilíbrio radiativo entre o Sol e os vários planetas, determine a temperatura média da radiação emitida por Vénus e pela Terra.

**Resolução**

A resolução deste problema implica a compreensão de uma subtilidade que é o facto de a área de incidência de radiação no planeta ser, de facto, um círculo (considerando que o planeta é aproximadamente esférico). A figura 4.1 ilustra o problema a analisar.



**Figura 4.1:** Esquema sugerido pelo enunciado da questão 8.

Sabendo que

$$\frac{dP_{\text{sol}}}{dA} = e\sigma T^4$$

obtém-se que

$$T = \sqrt[4]{\frac{P_{\text{sol}}}{Ae\sigma}} \approx \sqrt[4]{\frac{P_{\text{sol}}}{A\sigma}}.$$

Tem-se que a radiação recebida pelo planeta, considerando que a área de incidência é um círculo cujo raio é o raio do planeta, é

$$P_{\text{rec}} = \pi r_{\text{planeta}}^2 e\sigma \left( \sqrt[4]{\frac{P_{\text{sol}}}{4\pi d_{SP}^2 \sigma}} \right)^4$$

e que a energia radiada pelo planeta é

$$P_{\text{rad}} = 4\pi r_{\text{planeta}}^2 \sigma T_{\text{planeta}}^4.$$

Como  $P_{\text{rec}} = P_{\text{rad}}$ ,

$$\pi r_{\text{planeta}}^2 e\sigma \left( \sqrt[4]{\frac{P_{\text{sol}}}{4\pi d_{SP}^2 \sigma}} \right)^4 = 4\pi r_{\text{planeta}}^2 \sigma T_{\text{planeta}}^4 \Leftrightarrow T_{\text{planeta}} = \sqrt[4]{\frac{P_{\text{rad}}}{16\pi \sigma d_{SP}^2}}.$$

Resolvendo a equação anterior substituindo  $d_{ST}$  pela distância do Sol a Vénus e pela distância do Sol à Terra obtém-se que  $T_{\text{Terra}} \approx 4^\circ\text{C}$  e  $T_{\text{Vénus}} \approx 53^\circ\text{C}$ .

9. Quando o cézio é iluminado com a luz de comprimento de onda  $\lambda = 500 \text{ nm}$ , a energia cinética máxima dos fotoelétrons emitidos é de  $0.57 \text{ eV}$ . Determine a função

de trabalho do cério e determine o potencial de paragem para uma luz incidente de 600 nm.

### Resolução

Pela igualdade 4.5 do formulário calcula-se a função de trabalho do cério:

$$W = hf - E_{\text{cin}} = \frac{hc}{\lambda} - E_{\text{cin}} \approx 1.91 \text{ eV}.$$

A relação 4.6 dá o potencial de paragem, pelo que

$$qV = \frac{hc}{\lambda} - W \approx 0.16 \text{ eV} \Leftrightarrow V \approx 0.16 \text{ V}.$$

10. Quando luz de comprimento de onda  $\lambda = 620 \text{ nm}$  incide sobre a superfície de um metal alcalino, a velocidade máxima dos fotoelétrons emitidos é de  $4.6 \times 10^5 \text{ m s}^{-1}$ . Determine a função de trabalho do metal e a sua frequência de corte. A massa do eletrão é  $m_e = 9.109389 \times 10^{-31} \text{ kg}$ .

### Resolução

Utilizando a relação 4.5 do formulário obtém-se

$$W = \frac{hc}{\lambda} - \frac{1}{2}m_e v_e^2 \approx 1.40 \text{ eV}.$$

Por outro lado sabe-se que

$$W = \frac{hc}{\lambda_c}$$

pelo que

$$\lambda_c = \frac{hc}{W} \approx 8.87 \times 10^{-7} \text{ m} = 887 \text{ nm}.$$

11. Ao irradiar lítio com luz com comprimento de onda  $\lambda = 3000 \text{ Å}$  e  $\lambda = 4000 \text{ Å}$ , os potenciais de paragem encontrados foram 1.83 V e de 0.80 V, respetivamente. Com estes dados experimentais, determine a constante de Planck, a frequência de corte e a função de trabalho para o lítio. A carga do eletrão é  $q = 1.602177 \times 10^{-19} \text{ C}$ .

### Resolução

Combinando as igualdades 4.5 e 4.6 do formulário obtêm-se que

$$\begin{cases} W &= \frac{hc}{\lambda_k} - E_{\text{cin}_k} \\ qV_k &= \frac{hc}{\lambda_k} - W \end{cases}, k = 1, 2 \Rightarrow \frac{hc}{\lambda_1} - E_{\text{cin}_1} = \frac{hc}{\lambda_2} - qV_2 \Leftrightarrow E_{\text{cin}_1} = qV_2.$$

Como a função de trabalho é constante, resulta que

$$W = \frac{hc}{\lambda_1} - qV_1 = \frac{hc}{\lambda_2} - qV_2.$$

Resolvendo a equação anterior em ordem a  $h$  obtêm-se a constante de Planck:

$$h = \frac{q(V_1 - V_2)\lambda_1\lambda_2}{c(\lambda_2 - \lambda_1)} \approx 6.6 \times 10^{-34} \text{ J s}.$$

A função de trabalho do lítio, como já tinha sido visto, calcula-se

$$W = \frac{hc}{\lambda_1} - qV_1 = \frac{hc}{\lambda_2} - qV_2 \approx 2.3 \text{ eV}$$

e, conseqüentemente, a frequência de corte vem

$$f_c = \frac{c}{\lambda_c} = \frac{c}{\frac{hc}{W}} = \frac{W}{h} \approx 5.56 \times 10^{14} \text{ Hz} = 556 \text{ THz}.$$

12. Determine as frequências e os comprimentos de onda de corte dos seguintes metais não alcalinos: ouro, alumínio, carbono e ferro. Considere que as funções de trabalho são:  $\phi_{\text{ouro}} = 5.1 \text{ eV}$ ,  $\phi_{\text{alumínio}} = 4.1 \text{ eV}$ ,  $\phi_{\text{carbono}} = 4.8 \text{ eV}$ ,  $\phi_{\text{ferro}} = 4.5 \text{ eV}$ . Qual das frequências de corte corresponde a radiação visível? Conclua sobre qual a melhor cobertura para os revestimentos dos satélites artificiais.

Neste problema, a notação utilizada para a função de trabalho é  $\phi$ , no entanto é frequente referi-la como  $W$ .

### Resolução

Os comprimentos de onda e as frequências de corte podem ser obtidos a partir das funções de trabalho da seguinte forma:

$$\lambda_c = \frac{hc}{\phi}$$

e

$$f_c = \frac{\phi}{h}.$$

A partir das igualdades anteriores, obtêm-se os valores pedidos no enunciado que se listam na tabela 4.1.



| Metal    | $\phi$ ou W | $\lambda_c$ | $f_c$    | Gama de radiação |
|----------|-------------|-------------|----------|------------------|
| Ouro     | 5.1 eV      | 243 nm      | 1.23 PHz | Ultra violetas   |
| Alumínio | 4.1 eV      | 302 nm      | 991 THz  | Ultra violetas   |
| Carbono  | 4.8 eV      | 258 nm      | 1.16 PHz | Ultra violetas   |
| Ouro     | 4.5 eV      | 276 nm      | 1.09 PHz | Ultra violetas   |

**Tabela 4.1:** Tabela de valores pedidos no enunciado da questão 12.

A melhor cobertura para os satélites artificiais deverá ser de alumínio, porque devido à sua frequência de corte mais baixa, há uma maior gama de radiação capaz de produzir efeito fotoelétrico, carregando as placas dos satélites positivamente e, conseqüentemente, aumentando a diferença de potencial das faces iluminadas em relação às faces à sombra.

13. Determine o intervalo de variação da energia da radiação visível em unidades de eV. Considere que a radiação visível está no intervalo de comprimentos de onda  $400 \rightarrow 780 \text{ nm}$ .

#### Resolução

Aplicando a relação 4.5 ao problema, obtém-se

$$\Delta W [\text{eV}] = \Delta \left( \frac{hc}{\lambda} \right) \frac{1}{q} = hc \left( \frac{1}{\lambda_{\text{mín}}} - \frac{1}{\lambda_{\text{máx}}} \right) \frac{1}{q} = 1.51 \text{ eV}.$$

14. Um fóton com a energia de 511 keV colide com um elétron que podemos considerar em repouso. Depois da colisão, o fóton desvia-se  $45^\circ$  da direção de incidência. Determine a energia cinética do elétron depois da colisão. Dê o resultado em keV. A massa do elétron é  $m_e = 9.109389 \times 10^{-31} \text{ kg}$ .

#### Resolução

Partindo da equação da relatividade restrita 4.11 presente no formulário, a energia do elétron é

$$E_e = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} = \frac{m_e c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma m_e c^2.$$

Pela conservação da energia tem-se que  $E_i = E_f$ , onde  $E_i$  é a energia inicial

do sistema fóton mais eletrão e  $E_f$  a sua energia final. Desta forma vem que

$$\begin{aligned} E_i &= E_f \\ E_{\text{fotão}_i} + E_{e_i} &= E_{\text{fotão}_f} + E_{e_f} \\ hf_i + m_e c^2 &= hf_f + \gamma m_e c^2. \end{aligned}$$

O efeito de Compton vem expresso na relação 4.16, e a partir dessa relação obtém-se o valor final do comprimento de onda associado ao fóton:

$$\begin{aligned} \lambda_f - \lambda_i &= \lambda_c(1 - \cos \theta) \\ &= \frac{h}{m_e c}(1 - \cos \theta) \\ \lambda_f &= \lambda_i + \frac{h}{m_e c}(1 - \cos \theta) \\ &= \frac{hc}{E_{\text{fotão}_i}} + \frac{h}{m_e c}(1 - \cos(45^\circ)) \\ &= 3.137 \times 10^{-12} \text{ m}. \end{aligned}$$

A energia cinética do eletrão é a sua energia final menos a energia que tinha inicialmente em repouso. Desta feita, a partir das considerações anteriores, vem que

$$E_{e_{\text{cin}}} = (\gamma - 1)m_e c^2 = E_{\text{fotão}_i} - \frac{hc}{\lambda_f} \approx 1.86 \times 10^{-14} \text{ J} = 116 \text{ keV}.$$

15. Um fóton com um comprimento de onda  $\lambda = 0.7 \text{ nm}$  colide com um eletrão em repouso. Depois da colisão, a velocidade do eletrão é de  $1.4 \times 10^6 \text{ m s}^{-1}$ . Quanto é o desvio de Compton e qual o comprimento de onda do fóton depois da colisão? Depois da colisão, determine o ângulo que o fóton faz com a direção de incidência.

### Resolução

O enunciado sugere uma situação como a ilustrada na figura 4.3 do formulário em que o vetor velocidade do eletrão tem módulo  $v = 1.4 \times 10^6 \text{ m s}^{-1}$ .

Como  $v \ll c$  então pode-se usar uma abordagem clássica sem obter grande erro. Assim vem que

$$E_{e_{\text{cin}}} = \frac{1}{2}mv^2 \approx 8.927 \times 10^{-19} \text{ J} \approx 5.57 \text{ eV}.$$

De forma simplificada, pela lei da conservação da energia, sabe-se que a energia

perdida pelo fóton é igual à energia cinética final do elétron, pelo que

$$E_{\text{final fóton}} = E_{\text{inicial fóton}} - E_{e_{\text{cin}}} = \frac{hc}{\lambda_{\text{inicial}}} - E_{e_{\text{cin}}} = 1765.6 \text{ eV}$$

e, conseqüentemente,

$$\lambda_{\text{final}} = \frac{hc}{E_{\text{final fóton}}} \approx 7.02 \times 10^{-10} \text{ m} = 7.02 \text{ \AA}.$$

Partindo da igualdade 4.16 obtém-se

$$\begin{aligned} \cos \theta &= 1 - \frac{\lambda_f - \lambda_i}{\lambda_c} \\ &= 1 - \frac{\Delta \lambda m_e c}{h} \\ \theta &= 79.9^\circ. \end{aligned}$$

16. Um fóton com o comprimento de onda  $\lambda = 0.0016 \text{ nm}$  colide com um elétron em repouso. Para que desvio angular relativamente à direção de incidência do fóton, depois da colisão, a energia do fóton e do elétron são iguais?

### Resolução

A energia inicial do sistema fóton mais elétron é

$$E_{\text{inicial}} = \frac{hc}{\lambda_{\text{inicial}}} + m_e c^2$$

mas, por outro lado, sabe-se que, no final, as energias do fóton e do elétron são iguais, pelo que

$$E_{\text{final fóton}} = \frac{E_{\text{inicial}}}{2}.$$

O comprimento de onda final do fóton é facilmente calculável:

$$\lambda_{\text{final}} = \frac{hc}{E_{\text{final fóton}}}$$

e pela igualdade 4.16 do formulário conclui-se que

$$\begin{aligned} \cos \theta &= 1 - \frac{\lambda_f - \lambda_i}{\lambda_c} \\ &= 1 - \frac{\Delta \lambda m_e c}{h} \\ \theta &= 30.16^\circ. \end{aligned}$$

17. Com os dados da espectroscopia, calcule a velocidade da luz na água e no vidro. Assuma que a velocidade da luz no vácuo é  $c = 3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$ .

**Resolução**

São dados que  $n_{\text{vidro}} = 1.517$  e que  $n_{\text{água}} = 1.33$ .

Sabendo que  $n = c/v$ , então facilmente se calcula que  $v_{\text{vidro}} \approx 1.98 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$  e  $v_{\text{água}} \approx 2.25 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$ .

18. Ao irradiar uma amostra de hidrogénio gasoso com luz, os átomos de hidrogénio ionizam-se. Assuma que os **elétrões de todos os átomos estão no nível de energia mais ligado ao núcleo**.

- (a) Determine a **energia mínima de radiação incidente de modo a ionizar o átomo de hidrogénio**. Determine o **comprimento de onda** dessa radiação.

**Resolução**

Sabe-se que a energia dos elétrões do átomo de hidrogénio vem dada pelo modelo de Bohr em função do número atómico principal por

$$E_n = -\frac{13.6}{n^2} \text{ eV } n = 1, 2, \dots, \infty.$$

Visto que os elétrões de todos os átomos estão no nível 1,  $E_n = -13.6 \text{ eV} \Rightarrow W_{\text{mín}} = 13.6 \text{ eV}$  e, consequentemente,

$$\lambda_{\text{máx}} = \frac{hc}{W_{\text{mín}}} \approx 9.116 \times 10^{-8} \text{ m} = 91.16 \text{ nm}.$$

- (b) Determine a **quantidade de energia necessária para ionizar completamente 1 mol** de hidrogénio gasoso.

**Resolução**

Para obter a quantidade de energia necessária para ionizar uma amostra de hidrogénio gasoso basta apenas multiplicar o  $W_{\text{mín}}$  obtido na alínea anterior pelo número de Avogadro:

$$E = N_A \times W_{\text{mín}} \approx 1.31 \times 10^6 \text{ J} = 1.31 \text{ MJ}.$$

- (c) Se a potência de uma lâmpada capaz de produzir radiação desse comprimento de onda é de **500 W**, determine **durante quanto tempo é necessário irradiar a amostra de hidrogénio de modo a que todo o hidrogénio da amostra fique ionizado**.

**Resolução**

$$\Delta t = \frac{E}{P} \approx 2624.4 \text{ s} \approx 43.74 \text{ min.}$$

19. Um elétron tem a energia de  $1 \text{ MeV}$  e o seu momento foi medido com uma precisão de  $5\%$ . Determine a incerteza mínima na posição do elétron.

**Resolução**

Pelo princípio da incerteza de Heisenberg, a incerteza na posição do elétron é

$$\Delta x \geq \frac{h}{\Delta p}.$$

Tem-se que

$$E_e = \sqrt{p^2 c^2 + m_e^2 c^4} \Leftrightarrow p = \sqrt{\frac{E_e^2 - m_e^2 c^4}{c^2}}$$

pelo que

$$\Delta x \geq \frac{h}{0.05p} \approx 2.48 \times 10^{-11} \text{ m.}$$

20. Um átomo de hélio tem os seus elétrons nos níveis atômicos  $n = 2$  e  $n = 5$ . O elétron do nível  $n = 2$  decai para o nível atômico  $n = 1$  emitindo radiação. Essa radiação faz com que o elétron do nível atômico  $n = 5$  seja expelido do átomo de hélio. Considere que os níveis de energia do átomo de hélio são  $E_n = -2 \times 13.6/n^2 \text{ eV}$ .

- (a) Determine a velocidade do elétron expelido.

**Resolução**

A energia radiada pelo elétron que decai para o nível 1 é

$$E_2 - E_1 = -2 \times 13.6 \left( \frac{1}{4} - 1 \right) \approx 20.4 \text{ eV.}$$

A energia cinética do elétron que é expelido vem, consequentemente,

$$(E_2 - E_1) + E_5 \approx 19.312 \text{ eV.}$$

Coloque-se a hipótese de que a velocidade do elétron expelido é muito menor que a velocidade da luz. Se assim é, é viável utilizar uma abordagem

clássica:

$$E_{\text{cin}} = \frac{1}{2} m_e v_e^2 \Leftrightarrow v_e = \sqrt{\frac{2E_{\text{cin}}}{m_e}} \approx 2.61 \times 10^{-6}$$

Como  $v_e \ll c$  confirma-se a hipótese e não é necessário proceder a mais cálculos.

- (b) Se medir o momento do eletrão com uma incerteza de 0.01%, determine a incerteza mínima na determinação da posição do eletrão. A massa do eletrão é  $m_e = 9.109384 \times 10^{-31}$  kg.

### Resolução

Pelo princípio da incerteza de Heisenberg,  $\Delta x \Delta p \geq h \Leftrightarrow \Delta x \geq h/\Delta p$ .  
Como  $\Delta p = 0.01 \times 10^{-2}$  m N obtém-se trivialmente que  $\Delta x \geq 2.79 \mu\text{m}$ .

21. Num gás de hidrogénio a temperaturas absolutas positivas, considere que os eletrões atómicos podem estar nos níveis de energia  $n = 1$  e  $n = 2$ . Determine a percentagem de átomos com eletrões no nível  $n = 2$ , à temperatura ambiente  $T = 0^\circ\text{C}$  e no interior do Sol, em que  $T \approx 6000$  K.

### Resolução

Sabe-se que a probabilidade de um eletrão estar num determinado nível quântico é

$$P(E = E_i) = n_0 e^{-\frac{E_i}{kT}}$$

em que, para o átomo de hidrogénio,

$$E_n = -\frac{13.6}{n^2} \text{ eV}$$

e  $n_0$  é uma constante.

Para determinar a probabilidade de um eletrão estar no nível  $i$  calcula-se a o quociente entre a probabilidade de ele estar nesse nível e a soma das probabilidades de ele estar em qualquer outro nível, pelo que,

$$P(E = E_2) = \frac{n_0 e^{\frac{13.6q}{4kT}}}{n_0 \sum_n e^{\frac{13.6q}{n^2 kT}}} = \frac{e^{\frac{13.6q}{4kT}}}{\sum_n e^{\frac{13.6q}{n^2 kT}}}.$$

Substituindo os valores das temperaturas na expressão anterior e tendo em conta que  $n = 1, 2$ , vem que para  $T = 0^\circ\text{C}$ ,  $P(E = E_2) = 6.37 \times 10^{-189}$  e que para  $T = 6000$  K,  $P(E = E_2) = 2.71 \times 10^{-9}$ .

22. A emissão de radiação de um laser de  $\text{CO}_2$  deve-se às transições quânticas entre dois estados de vibração-rotação da molécula de  $\text{CO}_2$ . A diferença de energia entre esses níveis quânticos é de 0.117 eV.

- (a) Determine a frequência da radiação laser. Dê o resultado em  $\text{THz}$ .

#### Resolução

$$\Delta E = hf \Leftrightarrow f \approx 2.83 \times 10^{13} \text{ Hz} = 28.3 \text{ THz}.$$

- (b) Determine o comprimento de onda da radiação laser. Dê o resultado em  $\mu\text{m}$ .

#### Resolução

$$f = \frac{c}{\lambda} \Leftrightarrow \lambda = 1.06 \times 10^{-5} \text{ m} = 10.6 \mu\text{m}.$$

- (c) Determine a região espectral (cor) da radiação emitida.

#### Resolução

Por consulta da tabela 4.2 do formulário, verifica-se que a região espectral da radiação emitida é a dos infra-vermelhos.

23. Presentemente na Terra, no urânio natural, as abundâncias relativas de  $^{238}\text{U}$  e de  $^{235}\text{U}$  são 99.27% e 0.72%, respetivamente, e os seus períodos de semivida são 4510 e 703.8 milhões de anos. Assumindo que durante a formação da Terra os isótopos  $^{238}\text{U}$  e  $^{235}\text{U}$  foram criados em quantidades iguais, estime a idade da Terra.

#### Resolução

Sabe-se que o decaimento radioativo dos elementos descrevem uma exponencial da forma  $N(t) = N(0)e^{-\lambda t}$  onde  $N$  é número de espécimes do elemento e  $\lambda$  a sua constante de decaimento. A constante de decaimento de um elemento pode ser relacionada com o seu tempo de semi-vida da seguinte forma:

$$\lambda = \frac{\ln(2)}{\tau}.$$

Resolvendo a equação que rege o decaimento radiativo em função a  $N(0)$  obtém-se  $N(0) = N(t)e^{\lambda t}$ .

Considere-se que, a partir deste momento, as grandezas associadas ao  $^{238}\text{U}$  começarão a ser identificadas pelo índice 238 e as grandezas associadas ao  $^{235}\text{U}$  pelo índice 235.

Sabe-se que  $N(0)_{238} = N(0)_{235}$ , pelo que

$$N(t)_{238} e^{\lambda_{238} t} = N(t)_{235} e^{\lambda_{235} t}$$

ou, equivalentemente,

$$N(t)_{238} e^{\frac{\ln(2)}{\tau_{238}} t} = N(t)_{235} e^{\frac{\ln(2)}{\tau_{235}} t}$$

então

$$e^{\left(\frac{\ln(2)}{\tau_{238}} - \frac{\ln(2)}{\tau_{235}}\right)t} = \frac{N(t)_{235}}{N(t)_{238}}.$$

Como o enunciado dá as proporções dos dois isótopos em percentagem e a operação que é necessário fazer entre as duas é um quociente podem-se utilizar as proporções diretamente sob a forma de percentagem:

$$\begin{aligned} e^{\left(\frac{\ln(2)}{\tau_{238}} - \frac{\ln(2)}{\tau_{235}}\right)t} &= \frac{0.72}{99.27} \\ t &= \frac{\ln\left(\frac{0.72}{99.27}\right)}{\frac{\ln(2)}{\tau_{238}} - \frac{\ln(2)}{\tau_{235}}}. \end{aligned}$$

O resultado anterior vem expresso em segundos. Convertendo para anos, o resultado vem, aproximadamente, 5927 milhões de anos.

24. A energia radiada pelo Sol por unidade de tempo é de  $3.77 \times 10^{26} \text{ W}$  e o raio do Sol é  $6.98 \times 10^8 \text{ m}$ . O raio do átomo/núcleo de hidrogénio é da ordem de  $1.2 \text{ fm}$ . Considere que a energia radiada pelo Sol se deve a reações de fusão nuclear e que por cada reação de fusão de dois átomos de hidrogénio é libertada a energia de  $4.24 \times 10^{-12} \text{ J}$ .
- (a) Assumindo que o Sol é essencialmente constituído por hidrogénio, numa massa muito compacta, faça a estimativa do número de átomos de hidrogénio no Sol. Determine o número de átomos de hidrogénio que se fundem por segundo.

### Resolução

O número de átomos de hidrogénio existentes no sol é

$$n = \frac{V_{\text{sol}}}{V_H} = \frac{\frac{4}{3}\pi r_{\text{sol}}^3}{\frac{4}{3}\pi r_H^3} = \left(\frac{r_{\text{sol}}}{r_H}\right)^3 \approx 1.97 \times 10^{71} \text{ átomos}.$$

Por sua vez, o número de átomos de hidrogénio que se fundem por segundo é

$$n_F = \frac{3.77 \times 10^{26}}{4.24 \times 10^{-12}} \times 2 \approx 1.78 \times 10^{38} \text{ átomos s}^{-1}.$$

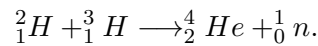
- (b) Considerando que o Sol morre quando se esgotar todo o hidrogénio, faça uma estimativa do tempo que o Sol vai demorar a extinguir-se. Dê o resultado em anos.



**Resolução**

$$\tau_{\text{sol}} = \frac{n}{n_F} \approx 3.51 \times 10^{25} \text{ anos.}$$

25. Considere a reação nuclear de fusão



Antes e depois da reação, o deutério, o trítio e o hélio estão em repouso. Determine a velocidade do neutrão depois da reação. As massas dos isótopos são:  $m({}^2_1\text{H}) = 2.014 \text{ u}$ ,  $m({}^3_1\text{H}) = 3.016 \text{ u}$ ,  $m({}^4_2\text{He}) = 4.0026 \text{ u}$  e  $m({}^1_0\text{n}) = 1.0087 \text{ u}$ .

**Resolução**

Sabe-se que

$$E({}^2_1\text{H}) + E({}^3_1\text{H}) = E({}^4_2\text{He}) + E({}^1_0\text{n})$$

que, tendo-se  $E = mc^2$  para corpos em repouso vem

$$c^2(m({}^2_1\text{H}) + m({}^3_1\text{H})) = c^2(m({}^4_2\text{He}) + m({}^1_0\text{n})) + E_{\text{cin}}({}^1_0\text{n})$$

pelo que vem que

$$E_{\text{cin}}({}^1_0\text{n}) = c^2(m({}^2_1\text{H}) + m({}^3_1\text{H}) - m({}^4_2\text{He}) - m({}^1_0\text{n})).$$

Suponha-se que  $v_{\text{neutrão}} \ll c$ . Opta-se em primeira instância por uma abordagem clássica:

$$v_{\text{neutrão}} = \sqrt{\frac{2E_{\text{cin}}({}^1_0\text{n})}{m({}^1_0\text{n})}} \approx 4.08 \times 10^7 \text{ m s}^{-1}.$$

Como  $v_{\text{neutrão}} \not\ll c$  é necessário adotar uma abordagem relativista:

$$E({}^1_0\text{n}) = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Leftrightarrow v = \sqrt{\left[ - \left( \frac{mc^2}{E({}^1_0\text{n})} \right)^2 + 1 \right] c^2}.$$

Substituindo na equação anterior

$$E({}^1_0\text{n}) = c^2(m({}^2_1\text{H}) + m({}^3_1\text{H}) - m({}^4_2\text{He}))$$

obtem-se  $v \approx 5.7 \times 10^7 \text{ m s}^{-1}$ .

26. A galáxia mais próxima da Via Láctea é a galáxia anã designada por Cão Maior. A distância do Cão Maior ao Sol é de 25000 anos-luz e a distância do Cão Maior ao centro da nossa galáxia, a Via Láctea, é de 42000 anos-luz. Faça uma estimativa

da intensidade da força de atração entre o Cão Maior e o Sol e entre o Cão Maior e a Via Láctea. A massa do Sol é de  $1.989 \times 10^{30}$  kg, a massa da Via Láctea é da ordem de  $2 \times 10^{42}$  kg e a massa do Cão Maior é da ordem de  $2 \times 10^{39}$  kg.

### Resolução

Utilizando a lei da gravitação universal de Newton

$$|F_g| = G \frac{m_1 m_2}{d^2}$$

facilmente se calcula que

$$|F_g|_{\text{Cão Maior - Sol}} \approx 4.73 \times 10^{18} \text{ N}$$

e que

$$|F_g|_{\text{Cão Maior - Via Láctea}} \approx 1.69 \times 10^{30} \text{ N}.$$

27. Pode-se imaginar que as órbitas dos planetas do sistema solar poderiam estar quantizadas de acordo com o modelo de Bohr. Neste contexto, determine a distância das órbitas dos planetas ao Sol. Calcule a distância da Terra ao Sol. A massa do Sol é de  $m_S = 1.989 \times 10^{30}$  kg, a massa da Terra é de  $5.972 \times 10^{24}$  kg e a constante de gravitação universal é  $G = 6.674 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ .

### Resolução

Para conceber um modelo de Bohr para o sistema solar é necessário estabelecer os seguintes postulados:

- (a) Os planetas movem-se em órbitas circulares em volta do Sol e força que rege este posicionamento é

$$|F_g| = G \frac{m_P m_S}{r^2};$$

- (b) Só algumas órbitas são estáveis (condição necessária para a quantização);  
 (c) As órbitas dos planetas obedecem à relação de quantização do momento angular.

Os postulados anteriores sugerem três igualdades:

$$m_P v r = n \hbar,$$

$$m_P r \dot{\theta}^2 = |F_g|$$

e

$$v = r\dot{\theta} \Leftrightarrow \dot{\theta} = \frac{v}{r}$$

Das igualdades anteriores resulta que:

$$v = \frac{n\hbar}{m_P r}$$

e que

$$m_P r \dot{\theta} = G \frac{m_P m_S}{r^2} \Leftrightarrow \frac{m_P v^2}{r} = G \frac{m_P m_S}{r^2} \Leftrightarrow v^2 = G \frac{m_S}{r} \Leftrightarrow \left( \frac{n\hbar}{m_P r} \right)^2 = G \frac{m_S}{r}$$

pelo que se conclui que

$$r = \frac{n^2 \hbar^2}{G m_S m_P^2}, \quad \hbar = \frac{h}{2\pi}.$$

Partindo da igualdade anterior, a distância da Terra ao Sol por este modelo é

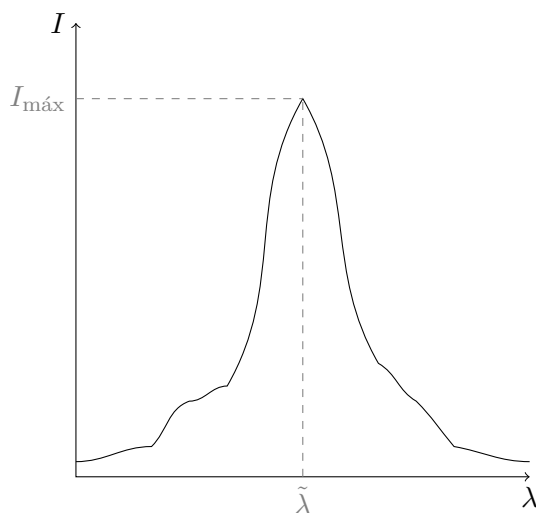
$$d_{\text{Terra} - \text{Sol}} \approx 2.11 \times 10^{-137} \text{ m}.$$

## 4.2 Formulário

### Lei de Wien

$$\tilde{\lambda}T = B \quad (4.1)$$

onde  $B$  é a constante de dispersão de Wien e o seu valor é  $B = 2.8977685 \times 10^{-3} \text{ m K}$ ,  $T$  é a temperatura do corpo radiativo e  $\tilde{\lambda}$  é o comprimento de onda associado à radiação mais intensa, como é ilustrado na figura 4.2.



**Figura 4.2:** Ilustração auxiliar de um espectro de radiação para ilustrar a Lei de Wien.

### Lei de Stefan-Boltzmann

$$\frac{dP}{dA} = e\sigma T^4 [\text{J s}^{-1} \text{ m}^{-2}] \quad (4.2)$$

onde  $dP/dA$  representa a potência de radiação por unidade de área,  $e$  é a emissividade do corpo,  $\sigma$  é a constante de Stefan e

o seu valor é  $\sigma = 5.6697 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$  e  $T$  representa a temperatura.

### Gamas de radiação

A tabela 4.2 lista as diferentes gamas de radiação e os comprimentos de onda que lhes são associados.

| $\lambda$                                      | Radiação          |
|------------------------------------------------|-------------------|
| $\lambda \leq 1 \text{ pm}$                    | Radiação $\gamma$ |
| $1 \text{ pm} \rightarrow 10 \text{ nm}$       | Raios X           |
| $10 \text{ nm} \rightarrow 0.4 \mu\text{m}$    | Ultra-violetas    |
| $0.4 \mu\text{m} \rightarrow 0.78 \mu\text{m}$ | Visível           |
| $0.78 \mu\text{m} \rightarrow 0.1 \text{ mm}$  | Infra-vermelhos   |
| $0.1 \text{ mm} \rightarrow 1 \text{ m}$       | Micro-ondas       |
| $\lambda > 1 \text{ m}$                        | Rádio             |

**Tabela 4.2:** Gamas de radiação e comprimentos de onda associados.

A tabela 4.3 discrimina dentro da radiação visível os comprimentos de onda associados às diferentes cores da radiação visível.

| $\lambda [\text{nm}]$ | Cor      |
|-----------------------|----------|
| $380 \rightarrow 440$ | Violeta  |
| $440 \rightarrow 485$ | Azul     |
| $485 \rightarrow 500$ | Ciano    |
| $500 \rightarrow 565$ | Verde    |
| $565 \rightarrow 590$ | Amarelo  |
| $590 \rightarrow 625$ | Laranja  |
| $625 \rightarrow 740$ | Vermelho |

**Tabela 4.3:** Comprimentos de onda associados às cores da radiação visível.

### Pressão de radiação (para um gás)

$$\tilde{P}_{\text{rad}} = \frac{1}{3} \frac{P_{\text{rad}}}{Ac} \quad (4.3)$$

onde  $\tilde{P}_{\text{rad}}$  é a pressão de radiação e  $P_{\text{rad}}$  é a potência de radiação.

$$|F_g| = G \frac{m_1 m_2}{d^2} \quad (4.10)$$

onde  $G$  é a constante de gravitação universal e o seu valor numérico é  $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$ .

### Energia do fóton

$$E_{\text{fóton}} = hf = \frac{hc}{\lambda} \quad (4.4)$$

onde  $h$  é a constante de Planck e é igual a  $6.6260693(11) \times 10^{-34} \text{ J s}$ .

### Mecânica relativista

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} = \gamma m c^2 \quad (4.11)$$

onde  $\gamma$  é designado fator de correção de Lorentz e é

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Da equação 4.11 é possível deduzir as relações de 4.12 a 4.14.

$$W = \frac{hc}{\lambda} - E_{\text{cin}} \quad (4.5)$$

onde  $E_{\text{cin}}$  simboliza a energia cinética do elétron arrancado ao átomo.

$$qV = \frac{hc}{\lambda} - W \quad (4.6)$$

onde  $q$  é carga do elétron e é igual a  $q = 1,60217733 \times 10^{-19} \text{ C}$  e  $V$  é o potencial de paragem.

$$\lambda_c = \frac{hc}{W} \Leftrightarrow f_c = \frac{W}{h} \quad (4.7)$$

onde  $\lambda_c$  e  $f_c$  são o comprimento de onda de corte e frequência de corte, respetivamente.

$$p = \sqrt{\frac{E^2 - m^2 c^4}{c^2}} \quad (4.12)$$

$$E_{\text{cin}} = \left[ \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right] m c^2 \quad (4.13)$$

$$v = \sqrt{\left[ 1 - \left( \frac{m c^2}{E} \right)^2 \right] c^2} \quad (4.14)$$

Quando o objeto está em repouso, a fórmula 4.11 vem simplificada:

$$E = m c^2. \quad (4.15)$$

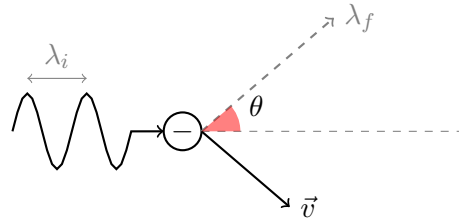
### Mecânica clássica ( $v \ll c$ )

$$p = mv \quad (4.8)$$

onde  $p$  é o momento linear.

$$E_{\text{cin}} = \frac{1}{2} m v^2 \quad (4.9)$$

### Efeito de Compton



**Figura 4.3:** Diagrama que ilustra o efeito de Compton.

$$\lambda_f - \lambda_i = \lambda_c(1 - \cos(\theta)) \quad (4.16)$$

onde  $\lambda_c$  é o comprimento de onda de Compton e é

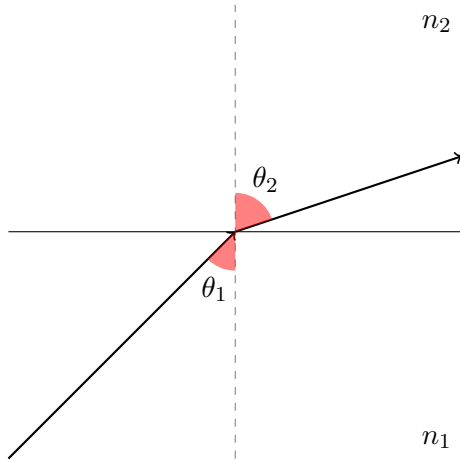
$$\lambda_c = \frac{h}{m_e c}.$$

#### Lei de Snell

A lei de Snell enuncia que

$$n_1 \sin(\theta_1) = n_2 \sin(\theta_2), \quad n_k = \frac{c}{v_k}, \quad k = 1, 2 \quad (4.17)$$

em que os parâmetros  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $n_1$  e  $n_2$  vêm indicados na figura 4.4.



**Figura 4.4:** Figura ilustrativa da Lei de Snell.

#### Energia dos níveis quânticos do hidrogénio

$$E_n = -\frac{13.6}{n^2} [\text{eV}] \quad (4.18)$$

#### Princípio da incerteza de Heisenberg

O princípio da incerteza de Heisenberg tem dois postulados, o primeiro enuncia que

$$\Delta x \Delta p \geq h \quad (4.19)$$

e o segundo postula que

$$\Delta t \Delta E \geq h. \quad (4.20)$$

#### Probabilidade de estados quânticos

Considere-se um átomo e os seus eletrões. A probabilidade de um eletrão ter a energia correspondente a um determinado estado quântico no átomo é

$$P(E = E_i) = \xi n_0 e^{-\frac{E_i}{k_B T}} \quad (4.21)$$

em que  $E_i$  designa a energia do eletrão quando está no nível quântico  $i$  do átomo em questão,  $\xi$  é tal que

$$\frac{1}{\xi} = n_0 \sum_n e^{-\frac{E_i}{k_B T}}$$

e  $n_0$  é uma constante.

Para o átomo de hidrogénio, considerando os níveis  $n = 1$  e  $n = 2$ ,

$$P(E = E_i) = \frac{e^{\frac{13.6}{i^2 k_B T} q}}{\sum_{n=1}^2 e^{\frac{13.6}{n^2 k_B T} q}}. \quad (4.22)$$

#### Radioatividade

O tempo de semi-vida de um elemento é o tempo que metade de uma determinada amostra desse elemento demora a decair. Designa-se por  $T_{1/2}$  ou  $\tau$ .

$$\tau = \frac{\ln(2)}{\lambda} \quad (4.23)$$

em que  $\lambda$  designa a constante de decaimento radioativo.

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} \quad (4.24)$$

## Capítulo 5

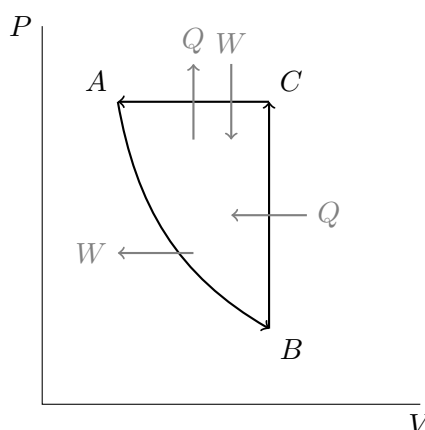
# Exames de anos anteriores

### 5.1 Exame de 5 de junho de 2012

- 1) O sistema de refrigeração de um frigorífico é constituído por uma mole de um gás, o isobutano ( $C_4H_{10}$ ). Durante o ciclo termodinâmico reversível do frigorífico, o isobutano começa por estar sujeito a uma expansão adiabática, seguindo-se de um aquecimento isocórico e, finalmente, o isobutano é comprimido e arrefecido isobaricamente. No total, o ciclo termodinâmico é constituído por três processos termodinâmicos elementares e o ciclo é percorrido no sentido contrário ao das rotações dos ponteiros dos relógios. Considere que a temperatura de funcionamento do frigorífico é de  $4^\circ\text{C}$  e que a temperatura exterior é de  $25^\circ\text{C}$ . A pressão máxima do isobutano na tubagem do frigorífico é de 10 bar. O isobutano é caracterizado pelas constantes termodinâmicas,  $c_V = 85.846 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$  e  $\gamma = 1.097$ .
  - a) Faça o diagrama ( $V, P$ ) do processo termodinâmico cíclico descrito. Indique os sentidos dos percursos e calcule as pressões, as temperaturas e os volumes no início e no fim dos três processos elementares.
  - b) Calcule as quantidades de calor e de trabalho trocadas entre o sistema termodinâmico e o exterior nas várias transformações elementares do ciclo. No diagrama do ciclo termodinâmico, indique os sentidos dos fluxos de calor e de trabalho.
  - c) Em condições normais de funcionamento do frigorífico são percorridos dois ciclos termodinâmicos por hora e o preço da energia elétrica é de 0.15 cêntimos por kilowatt-hora. Como o custo de funcionamento do frigorífico é devido ao custo da energia que alimenta o motor que comprime o gás de refrigeração, determine o custo diário de manutenção do frigorífico.
  - d) Assuma que a eficiência de um frigorífico é definida como a razão entre a energia aproveitada para o consumo e a energia que é gasta para manter o frigorífico a funcionar. Calcule a eficiência do ciclo termodinâmico do frigorífico.
- 2) Ao levantar voo e à temperatura de  $30^\circ\text{C}$ , um Boeing 737 tem 34 m de envergadura de asa. À altitude de 12000 m, a temperatura é de  $-70^\circ\text{C}$ . Determine a envergadura

- do avião a 12000 m de altitude. O coeficiente de expansão linear do alumínio é de  $2.4 \times 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ .
- 3) A energia radiada pelo Sol por unidade de tempo é de  $3.77 \times 10^{26} \text{ W}$  e o raio do Sol é  $6.98 \times 10^8 \text{ m}$ . O raio do átomo de hidrogénio é da ordem de  $1.2 \times 10^{-15} \text{ m}$ . Assuma que toda a energia radiada pelo Sol se deve a reações de fusão nuclear e que por cada reação de fusão de dois átomos de hidrogénio é libertada a energia de  $4.24 \times 10^{-12} \text{ J}$ .
- a) Assumindo que o Sol é essencialmente constituído por hidrogénio numa massa muito compacta, faça a estimativa do número de átomos de hidrogénio no Sol. Determine o número de átomos de hidrogénio que se fundem por segundo.
- b) Considerando que o Sol morre quando se esgotar todo o hidrogénio, faça uma estimativa do tempo que o Sol vai demorar a extinguir-se. Dê o resultado em anos.
- 4) É construído um laser de hidrogénio em que a luz emitida se deve à transição menos energética da série de Lyman. Determine o comprimento de onda da luz laser. A luz emitida por este laser é visível?

### 5.1.1 Resolução sumária



**Figura 5.1:** Ciclo termodinâmico que representa o frigorífico.

1. (a) O diagrama do processo cíclico descrito ilustra-se na figura 5.1. Sabe-se que:  $T_A = 25^\circ\text{C}$ ,  $T_B = 4^\circ\text{C}$ ,  $P_A = P_C = 10^6 \text{ Pa}$ ,  $n = 1$ ,  $c_V = 85.846 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$  e  $\gamma = 1.097$ .

**A:**

$$V_A = \frac{RT_A}{P_A} \approx 0.0025 \text{ m}^3 = 2.5 \text{ l};$$

**$\overline{\text{AB}}$ :**

$$T_A V_A^{\gamma-1} = T_B V_B^{\gamma-1} \Rightarrow V_B = \left( \frac{T_A}{T_B} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} V_A \approx 0.0053 \text{ m}^3;$$



$$P_B = \frac{RT_B}{V_B} \approx 434786 \text{ Pa};$$

**C:**

$$T_C = \frac{P_C V_C}{R} \approx 637 \text{ K} = 364^\circ \text{C}.$$

(b)  $\overline{AB}$ :  $dQ = 0$ ;

$$dW_{AB} = \frac{1}{\gamma - 1} (P_B V_B - P_A V_A) \approx -2016.85 \text{ J};$$

$\overline{BC}$ :  $dW = 0$ ;  $dQ = nc_V \Delta T \approx 30892 \text{ J}$ ;

$\overline{CA}$ :  $dW = -P_A(V_A - V_C) \approx 2800 \text{ J}$ .

$$\Delta v = c_V \Delta T = \Delta Q + \Delta W \Rightarrow \Delta Q = c_V \Delta T - \Delta W \approx -31889 \text{ J}.$$

(c) Ora, em cada ciclo é necessária a energia sob a forma de trabalho inerente à transformação  $\overline{CA}$  tal que  $dW_{AC} = 2800 \text{ J}$ , portanto:

$$\text{C.D.} = 2800 \times 2 \times 24 \times 0.15 = 20.16 \text{ €}.$$

(d)

$$e = \frac{dQ_{BC}}{dW_{AC}} = \frac{30892}{2800} \approx 11.$$

2.

$$\Delta L = 2.4 \times 10^{-5} \times 34 \times (-100) \approx -0.08 \text{ m} = 8 \text{ cm};$$

$$L = 34 - 0.08 = 33.92 \text{ m}.$$

3. (a)

$$N_H \simeq \frac{\frac{4}{3}\pi R_S^3}{\frac{4}{3}\pi R_H^3} = \frac{R_S^3}{R_H^3} \approx 1.95 \times 10^{71} \text{ átomos}.$$

A energia radiada por segundo, ou seja, a energia libertada pela reação de fusão dos átomos de hidrogénio é

$$\frac{3.77 \times 10^{26}}{4.24 \times 10^{-12}} \approx 8.89151 \times 10^{37} \text{ reações de fusão por segundo}.$$

Assim, o número de átomos que se fundem por segundo é  $2 \times 8.89151 \times 10^{37} = 1.7783 \times 10^{38} = N^*$ .

(b) Desaparecem  $N^*$  átomos de hidrogénio por segundo. As reações de fusão extinguir-se-ão em

$$\frac{1.95 \times 10^{71}}{1.7783 \times 10^{38}} \approx 1.09718 \times 10^{33} \text{ s}.$$

Como um ano, em segundos, é  $3600 \times 24 \times 365 \approx 3.1536 \times 10^7 \text{ s}$  o tempo de extinção do Sol, em anos, será  $1.09718 \times 10^{33} / 3.1536 \times 10^7 \approx 3.48 \times 10^{25} \text{ anos}$ .

4. Energia da série de Lyman:

$$E_n = -\frac{13.6}{n^2} \text{ eV},$$

para  $n = 2$  tem-se  $E_n = 13.6 \times 3/4$ , portanto:

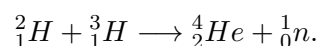
$$E_2 = hf = h\frac{c}{\lambda} \Leftrightarrow \lambda = \frac{hc}{E_2} \approx 121.8 \times 10^{-9} \text{ m} \approx 122 \text{ nm}.$$

Conclui-se assim que a luz deste laser está fora do espectro visível.

## 5.2 Exame de 18 de junho de 2014

- 1) Ao levantar voo e à temperatura de  $30^{\circ}\text{C}$ , a envergadura da asa de um avião comercial é de 34 m. À altitude de 11000 m, a temperatura é de  $-70^{\circ}\text{C}$ . Determine a envergadura do avião a 11000 m de altitude. O coeficiente de expansão linear do alumínio é de  $2.4 \times 10^{-5}^{\circ}\text{C}^{-1}$ .
- 2) O sistema de refrigeração de um frigorífico é constituído por 0.2 mol de um gás, o isobutano ( $\text{C}_4\text{H}_{10}$ ). Durante o ciclo termodinâmico reversível do frigorífico, o isobutano começa por estar sujeito a uma expansão adiabática, seguindo-se um arrefecimento isocórico, uma compressão adiabática e, finalmente, o isobutano é comprimido e arrefecido isobaricamente. No total, o ciclo termodinâmico é contituído por quatro processos termodinâmicos elementares e o ciclo é percorrido no sentido contrário ao das rotações dos ponteiros dos relógios. Considere que a temperatura de funcionamento do frigorífico é de  $4^{\circ}\text{C}$  e que a temperatura exterior é de  $25^{\circ}\text{C}$ . A pressão máxima do isobutano na tubagem do frigorífico é de 4 bar e a temperatura do isobutano no início da compressão adiabática é de  $8^{\circ}\text{C}$ . O isobutano é caracterizado pelas constantes termodinâmicas,  $c_V = 85.85 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$  e  $\gamma = 1.097$ .
  - a) Faça o diagrama ( $V, P$ ) do processo termodinâmico cíclico descrito. Indique os sentidos dos percursos e calcule as pressões, as temperaturas e os volumes no início e no fim dos três processos elementares.
  - b) Calcule as quantidades de calor e de trabalho trocadas entre o sistema termodinâmico e o exterior nas várias transformações elementares do ciclo. No diagrama do ciclo termodinâmico, indique os sentidos dos fluxos de calor e de trabalho.
  - c) Em condições normais de funcionamento do frigorífico são percorridos mil ciclos termodinâmicos por hora e o preço da energia elétrica é de 0.15 cêntimos por kilowatt-hora. Determine a potência do frigorífico. Como o custo de funcionamento do frigorífico é devido ao custo da energia que alimenta o motor que comprime o gás de refrigeração, determine o custo diário de manutenção do frigorífico.
  - d) Assuma que a eficiência de um frigorífico é definida como a razão entre a energia aproveitada para o consumo e a energia que é gasta para manter o frigorífico a funcionar. Calcule a eficiência do ciclo termodinâmico do frigorífico.
- 3) Foi feita uma experiência de Compton em que a radiação X de comprimento de onda  $\lambda = 0.003 \text{ nm}$  incide sobre uma placa de cobre.
  - a) Para que ângulo de refração a radiação refratada tem menor energia? Determine o comprimento de onda dessa radiação.
  - b) Determine a velocidade dos eletrões de Compton arrancados do metal devido à emissão de radiação refratada de menor energia. A energia em repouso do eletrão é 511 keV.

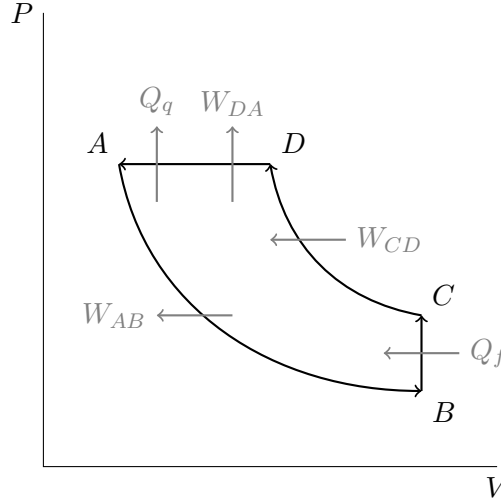
- 4) Considere a reação nuclear de fusão,



Antes e depois da reação, o deutério, o trítio e o hélio estão em repouso. Determine a velocidade do neutrão depois da reação. As massas dos isótopos são:  $m({}_1^2\text{H}) = 2.0141 \text{ u}$ ,  $m({}_1^3\text{H}) = 3.016 \text{ u}$ ,  $m({}_2^4\text{He}) = 4.0026 \text{ u}$  e  $m({}_0^1\text{n}) = 1.0087 \text{ u}$ .

### 5.2.1 Resolução sumária

1.  $\Delta L = \alpha L$ ;  $\Delta T = 2.4 \times 10^{-5} \times 34(-70 - 30) = 0.082 \text{ m}$ ;  $L_f = 34.082 \text{ m}$ .



**Figura 5.2:** Ciclo termodinâmico que representa o frigorífico.

2. (a) O diagrama do processo cíclico descrito ilustra-se na figura 5.1. Sabe-se que:  $c_V = 85.85 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$ ,  $P_A = 4 \text{ bar}$ ,  $T_{ext} = 25^\circ\text{C}$ ,  $n = 0.2$ ,  $T_B = 4^\circ\text{C} = T_f$ ,  $T_A = 25^\circ\text{C} = T_q$ ,  $T_C = 8^\circ\text{C}$ .

Sabe-se ainda que  $P_B = nRT_B/V_B$  e que  $T_A V_A^{\gamma-1} = T_B V_B^{\gamma-1} \Leftrightarrow V_B = V_A (T_A/T_B)^{1/(\gamma-1)}$ . Assim, as pressões e os volumes que restam calcular vêm:

**A:**

$$V_A = nR \frac{T_A}{P_A} = 0.2 \times 8.3145 \times \frac{25 + 273.15}{4 \times 10^5} \approx 0.001239 \text{ m}^3 \approx 1.21;$$

**B:**

$$V_B = 0.001239 \times \left( \frac{273.15 + 25}{273.15 + 4} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \approx 0.002631 \text{ m}^3;$$

$$P_B = 0.2 \times 8.3145 \times \frac{273.15 + 8}{0.002631} \approx 175118 \text{ Pa};$$

**C:**

$$P_C = nR \frac{T_C}{V_B} = 0.2 \times 8.3145 \times \frac{273.15 + 8}{0.002631} \approx 177646 \text{ Pa};$$

D:

$$V_D = V_B \left( \frac{P_C}{P_A} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \approx 0.001250 \text{ m}^3 = 1.255 \text{ l};$$

$$T_D = P_A \frac{V_D}{nR} \approx 302.071 \text{ K} \approx 28.9^\circ \text{C}.$$

- (b) As quantidades de calor e de trabalho trocadas entre o sistema e o exterior calculam-se de seguida:

$$W_{AB} = nc_V(T_B - T_A) \approx -300.57 \text{ J};$$

$$W_{CD} = nc_V(T_D - T_C) \approx 359.198 \text{ J};$$

$$W_{DA} = nR(T_D - T_A) \approx 6.518 \text{ J};$$

$$Q_{BC} = Q_f = nc_V(T_C - T_B) \approx 68.68 \text{ J};$$

$$Q_{DA} = Q_q = n \underbrace{(c_V + R)}_{c_P} (T_A - T_D) \approx -73.8269 \text{ J}.$$

- (c) **Potência:**  $W_{CD} \times 1000/3600 \approx 99.77 \text{ J s}^{-1} \approx 100 \text{ W};$

**Custo:**  $100 \times 24 \times 0.15/1000 \approx 0.36 \text{ €}.$

- (d)  $Q_f/W_{CD} \approx 0.19.$

3. (a)  $\theta = \pi/2$ , nestas condições tem-se que  $\cos \theta = 0$  e  $f = c/\lambda$  é máximo. Comprimento de onda:  $\lambda = \lambda_0 + 2.43 \times 10^{-12} = 5.43 \times 10^{-12} \text{ m} = 5.43 \text{ pm}.$

- (b)

$$hf_0 + 511 = hf_1 + \frac{511}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} [\text{kV}];$$

$$\gamma = \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} = \frac{511 \times 10^3}{511 \times 10^3 + h(f_0 - f_1)};$$

$$hf_0 = h \frac{c}{\lambda_0} = \frac{3 \times 10^8}{3 \times 10^{-12}} \frac{h}{1.602 \times 10^{-19}} \approx 413608 \text{ eV};$$

$$hf_1 = h \frac{c}{\lambda_1} = \dots \approx 228513 \text{ eV};$$

$$\gamma^2 = 1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2 = \left( \frac{511}{511 + 413.608 - 228.513} \right)^2 \approx 0.53886;$$

$$v = c\sqrt{1 - 0.53886} = c \times 0,679073 = 2.037 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}.$$

O velocidade obtida é aproximadamente 68% da velocidade da luz, pelo que este problema não pode ser resolvido pela teoria clássica.

4. Depois da reação a energia do neutrão é  $E = 2.0141 + 3.0160 - 4.0026 = 1.0275 \mu\text{J}$ .

$$1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2 = \left(\frac{1.0087}{1.0275}\right)^2 \approx 0.963741;$$

Tem-se então que

$$1.0275 = \frac{1.0087}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \Leftrightarrow v = c\sqrt{1 - 0.963741} = c \times 0.19041v \approx 5.7 \times 10^7 \text{ m s}^{-1}.$$