



Apontamentos de Cálculo Diferencial e Integral II

JOÃO MIGUEL MORGADO PEREIRA VIEIRA (*ALUNO DE MEEC*)

joaomiguelvieira@tecnico.ulisboa.pt

Atualizado pela última vez em 27 de Setembro de 2014

Esta coletânea de apontamentos foi realizada originalmente para alunos de MEEC. Trata-se de um resumo da matéria aproximadamente da forma como esta é exposta nas aulas, e **serve apenas para complementar** o estudo.

Este documento foi processado por L^AT_EX

Versão 2

Esta é a segunda versão destes apontamentos de Cálculo Diferencial e Integral II. Este é o resultado da primeira revisão científica realizada pelo Professor João Pimentel Nunes, a quem ficam, desde já, os meus profundos agradecimentos.

Apesar de já ter sido revista, esta versão poderá estar ainda sujeita a alguns erros ou imprecisões, pelo que é possível que venham a ser lançadas novas versões.

João Miguel Vieira, 27 de Setembro de 2014

Índice

1	Aula de 19 de fevereiro de 2014	6
2	Aula de 20 de fevereiro de 2014	9
3	Aula de 21 de fevereiro de 2014	13
4	Aula de 24 de fevereiro de 2014	15
5	Aula de 26 de fevereiro de 2014	18
6	Aula de 27 de fevereiro de 2014	21
7	Aula de 28 de fevereiro de 2014	24
8	Aula de 5 de março de 2014	28
9	Aula de 6 de março de 2014	31
10	Aula de 7 de março de 2014	34
11	Aula de 10 de março de 2014	36
12	Aula de 12 de março de 2014	39
13	Aula de 13 de março de 2014	42
14	Aula de 14 de março de 2014	45
15	Aula de 17 de março de 2014	49
16	Aula de 19 de março de 2014	52
17	Aula de 20 de março de 2014	55
18	Aula de 21 de março de 2014	59
19	Aula de 24 de março de 2014	63
20	Aula de 26 de março de 2014	66
21	Aula de 27 de março de 2014	70
22	Aula de 28 de março de 2014	74

23 Aula de 31 de março de 2014	78
24 Aula de 2 de abril de 2014	82
25 Aula de 3 de abril de 2014	87
26 Aula de 4 de abril de 2014	90
27 Aula de 7 de abril de 2014	94
28 Aula de 9 de abril de 2014	97
29 Aula de 10 de abril de 2014	101
30 Aula de 11 de abril de 2014	106
31 Aula de 14 de abril de 2014	107
32 Aula de 23 de abril de 2014	111
33 Aula de 24 de abril de 2014	115
34 Aula de 28 de abril de 2014	118
35 Aula de 30 de abril de 2014	122
36 Aula de 2 de maio de 2014	127
37 Aula de 5 de maio de 2014	132
38 Aula de 7 de maio de 2014	136
39 Aula de 8 de maio de 2014	140
40 Aula de 9 de maio de 2014	145
41 Aula de 12 de maio de 2014	150
42 Aula de 14 de maio de 2014	154
43 Aula de 15 de maio de 2014	159
44 Aula de 16 de maio de 2014	164
45 Aula de 19 de maio de 2014	169
46 Aula de 20 de maio de 2014	174
47 Aula de 22 de maio de 2014	180
48 Aula de 23 de maio de 2014	184

1 Aula de 19 de fevereiro de 2014

Bibliografia principal: Gabriel Pires, *Cálculo Diferencial e Integral em $\mathbb{R}^n$* , IST Press, 2012.

Topologia em $\mathbb{R}^n$

Definição 1.1. $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}$ é um espaço vetorial de dimensão n , com base canónica $\{e_1, \dots, e_n\}$ com $e_j = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_j, 0, \dots, 0)$. ■

A Recordar 1. A distância entre $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$ é dada por $|x - y|$.
Uma vizinhança aberta de raio $\varepsilon > 0$ centrada em $a \in \mathbb{R}$ é:

$$]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\Leftrightarrow \text{Pontos de } \mathbb{R} \text{ que distam de } a \text{ menos do que } \varepsilon.$$

A Recordar 2. O produto interno entre $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ é dado por:

$$x \cdot y = \sum_{j=1}^n x_j y_j = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

A norma de $x \in \mathbb{R}^n$ é dada por $\|x\|^2 = x \cdot x$ com $\|x\| \geq 0$ e $\|x\| = 0$ sse $x = 0$.

A Recordar 3.

$$x \cdot y = \|x\| \|y\| \cos \theta$$

Sendo θ ângulo formado pelos dois vetores x e y . ■

Definição 1.2. Se $x, y \in \mathbb{R}^n$, a distância entre x e y é dada por $\|x - y\|$. ■

Definição 1.3. $a \in \mathbb{R}^n$. Define-se bola aberta centrada em a com raio $\varepsilon > 0$ por:

$$B_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| < \varepsilon\}$$



Pontos de $\mathbb{R}^n$ que distam de a menos do que ε .

■

Exemplo 1.3.1. $n = 1$, $B_\varepsilon(a) =]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$.

■

Exemplo 1.3.2. $n = 2$: produz um círculo sem fronteira de raio ε em torno do ponto a .

■

Definição 1.4. $A \subset \mathbb{R}^n$. Um ponto $p \in \mathbb{R}^n$ diz-se:

- **Interior a A:** se $\exists \varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(p) \subset A$;
- **Exterior a A:** se $\exists \varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(p) \subset \mathbb{R} \setminus A$;
- **Fronteiro a A:** se $\forall \varepsilon > 0$, $B_\varepsilon(p) \cap A \neq \emptyset$ e $B_\varepsilon(p) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) \neq \emptyset$.

■

Exemplo 1.4.1. Considere-se o conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$. Graficamente obteríamos um círculo de raio 1 e centro na origem do referencial, sendo que os pontos da fronteira não estão contidos no conjunto. Um ponto na fronteira de A é um ponto s cujas coordenadas respeitam a igualdade $x^2 + y^2 = 1$. As coordenadas de um ponto exterior respeitam a desigualdade $x^2 + y^2 > 1$, e, finalmente, um ponto interior respeita a definição do conjunto.

■

Definição 1.5. $A \subset \mathbb{R}^n$ diz-se:

- **Aberto:** se todos os seus pontos são interiores (não contém nenhum dos seus pontos fronteiros);
- **Fechado:** se $\mathbb{R}^n \setminus A$ é aberto. (A contém todos os seus pontos fronteiros);
- **Compacto:** se o conjunto é limitado e fechado.

■

Definição 1.6. O fecho de A é $\overline{A} = A \cup (\text{fronteira de } A)$.

■

Exemplo 1.6.1. Seja A definido por:

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x, y, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}$$

Neste caso podemos afirmar que a fronteira de A são os planos definidos por $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ e $x + y + z = 1$ e $A = \overline{A}$.

■

Exemplo 1.6.2. Seja B definido por:

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x, y, z > 0, x + y + z < 1\}$$

É fácil verificar que o conjunto B corresponde ao interior do conjunto A do exemplo 1.6.1. Assim sendo, o conjunto B é um conjunto aberto.

■

Exemplo 1.6.3. Seja W definido por:

$$W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > x^2, |x| \leq 1\}$$

Neste caso a região indicada é a região situada entre os braços da parábola definida por $y = x^2$ e as retas verticais de equações $x = 1$ e $x = -1$. Visto que a região contém parte da sua fronteira (as retas verticais) mas não contém a totalidade da fronteira, podemos afirmar que o conjunto não é aberto, mas, por outro lado, ele também não é fechado. Assim sendo o conjunto W não é aberto nem fechado. ■

Sucessões em $\mathbb{R}^n$

Dar uma sucessão, $\{x_j\}, j \in \mathbb{N}$, de pontos em $\mathbb{R}$ é exatamente equivalente a dar as suas n sucessões reais das coordenadas.

$$\{x_k^j\} j \in \mathbb{N}, k = 1, \dots, n$$

Exemplo 1.6.4.

$$x_j = \left(\frac{1}{j}, j^2, 3j - 2, 4 \right), j \in \mathbb{N}.$$

- Sucessão em $\mathbb{R}^4$;

- O 5º termo da sucessão é: $x^5 = \left(\underbrace{\frac{1}{5}}_{x_1^5}, \underbrace{25}_{x_2^5}, \underbrace{13}_{x_3^5}, \underbrace{4}_{x_4^5} \right)$

Questão: Será que $x^j \longrightarrow a \in \mathbb{R}^n$? ■

Definição 1.7. A sucessão $\{x^j\}_{j \in \mathbb{N}}$ em $\mathbb{R}^n$ **converge** para o limite $x \in \mathbb{R}^n$ se $\forall$ bola aberta centrada em x , $B_\varepsilon(x)$ com $\varepsilon > 0$, $\exists p \in \mathbb{N}$ tal que $k > p \Rightarrow x^k \in B_\varepsilon(x)$.

De modo equivalente:

$$x^k \longrightarrow x \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists p \in \mathbb{N} : \\ k > p \Rightarrow \|x^k - x\| < \varepsilon$$

■

2 Aula de 20 de fevereiro de 2014

Exemplo 2.1. Seja $x^j = \left(\frac{1}{j^2+1}, \frac{j}{3j+1}, 4, \frac{1}{j} + 1 \right)$ sucessão em $\mathbb{R}^4$

Temos que $x^j \rightarrow \left(0, \frac{1}{3}, 4, 1 \right)$. ■

Exemplo 2.2. Seja $x^j = \left((-1)^j, 1, \frac{1}{j} \right)$ sucessão em $\mathbb{R}^3$

Observa-se que esta sucessão não converge (diverge), pois a sucessão da sua primeira coordenada é uma sucessão alternada que para j par assume o valor 1 e para j ímpar assume o valor -1 . ■

Exemplo 2.3. Seja $x^j = \left(j, \frac{1}{j}, 3 \right)$ sucessão em $\mathbb{R}^3$

É imediato que a sucessão é divergente, pois a sucessão da primeira coordenada é:

$$x_1^j = j \rightarrow +\infty$$

Conclui-se assim que a sucessão é divergente. ■

Teorema 2.1. A sucessão $\{x^j\}$, $j \in \mathbb{N}$ em $\mathbb{R}^n$ converge para $x \in \mathbb{R}^n$ sse todas as suas sucessões coordenadas convergem para as coordenadas respetivas do limite x :

$$x^j \rightarrow x \Leftrightarrow x_k^j \rightarrow x_k, k = 1, \dots, n$$

■

A Recordar 4. (Teorema de Bolzano-Weierstrass) Uma sucessão limitada de números reais tem sempre uma subsucessão convergente. ■

Uma subsucessão $\{x^j\}$, $j \in \mathbb{N}$ em $\mathbb{R}^n$ é limitada sse todas as sucessões coordenadas são limitadas.

Teorema 2.2 (Bolzano-Weierstrass). Qualquer sucessão limitada em $\mathbb{R}^n$ tem uma subsucessão convergente. ■

Demonstração. Usamos o resultado de $\mathbb{R}$.

1. A sucessão das primeiras coordenadas é limitada, logo existe uma subsucessão convergente;
2. A sucessão das segundas coordenadas é limitada, logo existe uma subsubsucessão com primeira e segunda coordenadas convergentes;
3. $\dots \rightarrow 3^a, 4^a, \dots$ coordenadas convergentes.

□

Exemplo 2.2.1. Seja

$$x^j = \left((-1)^j, (-1)^{\frac{j(j+1)}{2}} + \frac{2}{j} \right)$$

sucessão em $\mathbb{R}^3$. A sucessão é limitada mas não é convergente.

1. Subsucessão $x^{2j} = \left(+1, (-1)^{j(2j+1)} + \frac{1}{j} \right)$

A sucessão das primeiras coordenadas já é convergente.

2. Subsubsucessão $x^{4j} = \left(+1, +1 + \frac{1}{2j} \right) \rightarrow (1, 1)$

As sucessões da primeira e da segunda coordenadas já são convergentes, pelo que a subsubsucessão é convergente.

■

Teorema 2.3. $A \subset \mathbb{R}^n$ é fechado $\Leftrightarrow$ Todas as sucessões contidas em A têm limite contido em A . ■

Demonstração. Idêntica à de CDI-I. □

Teorema 2.4. $A \subset \mathbb{R}^n$ é compacto $\Leftrightarrow$ Qualquer sucessão contida em A tem uma subsucessão convergente para um limite em A ■

Demonstração. Idêntica à de CDI-I. □

Continuidade

A Recordar 5. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em $a \in \mathbb{R}$ se:

$$\forall \delta > 0, \exists \varepsilon > 0 : \underbrace{|x - a| < \varepsilon}_{x \in B_\varepsilon(a)} \Rightarrow \underbrace{|f(x) - f(a)| < \delta}_{f(x) \in B_\delta(f(a))}$$

Definição 2.1.

$$f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

f diz-se contínua em $a \in D$ se $\forall \delta > 0, \exists \varepsilon > 0$:

$$x \in \underbrace{B_\varepsilon(a)}_{\|x-a\| < \varepsilon} \cap D \Rightarrow f(x) \in \underbrace{B_\delta(f(a))}_{\|f(x)-f(a)\| < \delta}$$

A Recordar 6. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em $a \in \mathbb{R}$ sse $\forall$ sucessão $x^j \rightarrow a$ se tem $f(x^j) \rightarrow f(a)$. ■

Teorema 2.5. $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é contínua em $a \in D$ sse para toda a sucessão $\{x^j\}$, $j \in \mathbb{N}$ contida em D com $x^j \rightarrow a$, se tem $f(x^j) \rightarrow f(a)$. ■

Demonstração. Idêntica à de CDI-I. □

$$f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$f = (f_1, \dots, f_m)$$

$$f_j : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

Teorema 2.6. f é contínua em a sse todas as suas funções coordenadas são contínuas em a . ■

Demonstração. É fácil verificar que se $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ são contínuas então $f + g, f \cdot g, ||f||, \dots$ são contínuas. □

Exemplo 2.6.1.

$$f(x, y) = (\cos^3(xy) + y^5, -y^7 + x^3)$$

O domínio de f é $\mathbb{R}^2$ e f é contínua. ■

Exemplo 2.6.2.

$$h(x, y) = \left(\frac{1}{y - x^2}, \frac{1 + y}{x - 1} \right)$$

h é contínua no seu domínio, $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq x^2, x \neq 1\}$. ■

Nota 2.1. Se $f = (f_1, \dots, f_m)$, o domínio de f é a interseção dos domínios dos $f_j, j = 1, \dots, m$. ■

3 Aula de 21 de fevereiro de 2014

Limites de valores de funções

Dada uma função contínua $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ e dado um ponto $a \in \mathbb{R}^n$ fronteiro a D , com $a \notin D$, queremos saber se faz sentido prolongar o domínio de f a $D \cup \{a\}$ de forma a que essa extensão de f seja contínua.

Para que isso aconteça é necessário que ao longo de qualquer sucessão em D que convirja para a , os valores de f convirjam para o mesmo limite.

Basta trabalharmos com uma função coordenada de cada vez e tomar $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, contínua.

Definição 3.1. Seja a fronteiro a D . Escrevemos

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \\ \text{se } \forall \delta > 0, \exists \varepsilon > 0 : x \in B_\varepsilon(a) \Rightarrow f(x) \in B_\delta(b) \\ \Updownarrow \\ \forall \text{ sucessão } \{x^j\}, j \in \mathbb{N} \text{ em } D \text{ com } x^j \rightarrow a \text{ tem-se } f(x^j) \rightarrow b. \end{aligned}$$

Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, podemos prolongar f por continuidade a $D \cup \{a\}$ definindo $f(a) = b$.

Note-se que se $a \in D$, então $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe sse f é contínua em a e nesse caso $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. ■

Exemplo 3.1.1.

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ D &= \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \\ f \text{ é contínua em } D, \exists \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)? \\ f(x, 0) &= \underbrace{|x| \rightarrow 0}_{\text{quando } x \rightarrow 0} \Rightarrow \text{se } \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) \text{ então esse limite é } 0. \end{aligned}$$

■

$$\begin{aligned} 0 \leq |f(x, y) - 0| = |f(x, y)| &= \left| \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \leq \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sqrt{x^2 + y^2} \xrightarrow{\text{quando } (x, y) \rightarrow (0, 0)} 0 \\ &\Downarrow \\ \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} |f(x, y)| &= 0 \\ &\Downarrow \\ \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) &= 0 \end{aligned}$$

ou seja, podemos prolongar f por continuidade a todo o $\mathbb{R}^2$, definindo $f(0, 0) = 0$.

Exemplo 3.1. $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, f é contínua em D .

$$f(0, y) = -1, f(x, 0) = 1 \Rightarrow \nexists \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$$

■

Se $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ e se $\exists \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ **então** $\exists \lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x)$, $\exists \lim_{x \rightarrow a} |f(x)|$.

Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $g : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$, com $f(D) \subset E$. Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ e se $\lim_{y \rightarrow b} g(y) = c$, então $\lim_{x \rightarrow a} g \circ f(x) = c$.

Exemplo 3.2. Vimos que $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$, então:

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \cos \left(\frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = \cos(0) = 1$$

, porque $\cos$ é contínuo.

■

Limites direcionais

Podemos testar a existência de $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ estudando f ao longo de semi retas com origem em a .

Chama-se limite direcional de f em a segundo v a:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(a + tv), \text{ caso exista.}$$

Se existirem dois limites direcionais de f em a com valores diferentes então $\nexists \lim_{x \rightarrow a} f(x)$. De modo equivalente, se $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ então todos os limites direcionais de f em a são iguais.

Exemplo 3.3. $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$, $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, f contínua em D .

Considere-se a semi-reta

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, mx) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx^2}{x^2 + m^2x^2} = \frac{m}{\underbrace{1 + m^2}}$$

Depende de m

$$\Downarrow \\ \nexists \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$$

■

Se todos os limites direcionais de f em a forem iguais, isso garante que $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x)$?

Resposta: Não!

4 Aula de 24 de fevereiro de 2014

$\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) \quad \begin{matrix} \Rightarrow \\ \not\Leftarrow \end{matrix} \quad \text{Todos os limites direcionais de } f \text{ em } a \text{ são iguais.}$

Exemplo 4.1. $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \quad D = \mathbb{R}^n \setminus \{(0, 0)\}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, mx) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx^3}{x^4 + m^2 x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx}{x^2 + m^2} = 0$$

, e

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = 0$$

No entanto, isso não prova que $\exists \lim_{x \rightarrow 0} f(a)$. Como podemos verificar os limites direcionais de f em a são 0.

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Todos os limites direcionais de } f \text{ em } (0, 0) \text{ são } 0.$$

Considere-se agora a parábola de equação $y = x^2$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x^2) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{x^4 + x^4} = \frac{1}{2} \neq 0 \Rightarrow \nexists \lim_{(x, y) \rightarrow 0} f(x, y)$$

■

Coordenadas polares

Considere-se: R a distância de um dado ponto de coordenadas $A(x, y)$ à origem e θ o ângulo definido pela reta $\overline{OA}$ e pelo eixo dos xx .

- $R \in [0, +\infty[$ (*mais à frente, veremos que $R \in]0, +\infty, \theta \in]0, 2\pi[$ é mais correto*);
- $\theta \in [0, 2\pi[$;
- $R = \sqrt{x^2 + y^2}$.

$$\begin{cases} x = R \cos \theta \\ y = R \sin \theta \end{cases}$$

$$(x, y) \longrightarrow (0, 0) \Leftrightarrow R \longrightarrow 0$$

θ pode ter um comportamento qualquer em função de R , à medida que $R \longrightarrow 0$.

Exemplo 4.2.

$$\begin{aligned}
 f(x, y) &= \frac{x^3 + 3x^2y - y^3}{x^2 + y^2}, \quad D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \\
 0 \leq |f(x, y)| &= \left| \frac{R^3 \cos^3 \theta + 3R^3 \cos^2 \theta \sin \theta - R^3 \sin^3 \theta}{R^2} \right| = \\
 &= R \underbrace{|\cos^3 \theta + 3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta|}_{\leq 5 \text{ seja qual for o comportamento de } \theta \text{ quando } R \rightarrow 0} \leq 5R \underbrace{\longrightarrow}_{R \rightarrow 0} 0
 \end{aligned}$$

outro modo:

$$\underbrace{|x| \leq \sqrt{x^2 + y^2}, |y| \leq \sqrt{x^2 + y^2}}_{|x|, |y| \text{ são menores do que ou iguais à distância de } (x, y) \text{ à origem.}}$$

$$\begin{aligned}
 0 &\leq |f(x, y)| = \\
 &= \left| \frac{x^3 + 3x^2y - y^3}{x^2 + y^2} \right| \leq \frac{|x|^3 + 3x^2|y| + |y|^3}{x^2 + y^2} \leq \\
 &\leq \frac{5 \left(\sqrt{x^2 + y^2} \right)^3}{x^2 + y^2} = 5\sqrt{x^2 + y^2} \underbrace{\longrightarrow}_{(x, y) \rightarrow 0} 0
 \end{aligned}$$

$\Updownarrow$

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0$$

ou ainda:

$$\begin{aligned}
 0 \leq |f(x, y)| &\leq \frac{|x|^3 + 3x^2|y| + |y|^3}{x^2 + y^2} = \\
 &= \frac{|x|^3 + 3x^2|y|}{x^2 + y^2} + \frac{|y|^3}{x^2 + y^2} \leq \frac{|x|^3 + 3x^2|y|}{x^2} + \frac{|y|^3}{y^2} = \\
 &= |x| + 3|y| + |y| \underbrace{\longrightarrow}_{x, y \rightarrow 0} 0 \Rightarrow \lim_{x, y \rightarrow 0} f(x, y) = 0
 \end{aligned}$$

■

Exemplo 4.3. $f(x, y) = x \log(xy), D : xy > 0$

$$\exists \lim_{x,y \rightarrow 0} f(x, y)?$$

Todos os limites direcionais e em curvas da forma $y = x^2, y = x^3, \dots, y = x^k$, dão zero.

Tomemos a curva $y = e^{-\frac{1}{x^2}}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, e^{-\frac{1}{x^2}}) &= \lim_{x \rightarrow 0} x \log(xe^{-\frac{1}{x^2}}) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} x \log x + \lim_{x \rightarrow 0} x \log e^{-\frac{1}{x^2}} = 0 + \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{x}\right) = \\ &= \infty \Rightarrow \nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) \end{aligned}$$

de outro modo:

$$|f(x, y)| = |x \log(xy)| = |R \cos \theta \log(R^2 \cos \theta \sin \theta)| = R \underbrace{|\cos \theta|}_{\leq 1} |2 \log R + \log \cos \theta \sin \theta|$$

$$R \log R \xrightarrow{R \rightarrow 0} 0$$

, mas, $R \log(\cos \theta \sin \theta)$ não tem limite quando $R \rightarrow 0$. Por exemplo:

Podemos tomar curvas com $\theta(R) \xrightarrow{R \rightarrow 0} 0$, $\log(\cos \theta \sin \theta) \rightarrow \infty$ tão rápido quanto queiramos.

$\Updownarrow$

$$\nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$$

■

5 Aula de 26 de fevereiro de 2014

Teorema 5.1 (Weierstrass). $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, com D compacto, tem máximo e mínimo em D .

Recordemos que um conjunto é compacto quando é limitado e fechado ■

Demonstração. $\{x^j\}$ sucessão em D tem uma subsucessão $x^j \rightarrow x \in D$, porque D é compacto. Como f é contínua $f(x^j) \rightarrow f(x) < \infty \Rightarrow f$ é limitada.

Assim sendo, o conjunto dos valores de f tem ínfimo e supremo.

Pelo mesmo raciocínio, o ínfimo e o supremo são mesmo atingidos em pontos de D pelo que f tem mínimo e máximo. □

Exemplo 5.1.1. Na superfície terrestre

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

$\exists$ ponto com temperatura máxima e um ponto com temperatura mínima porque S^2 é compacto (assumindo que a temperatura é uma função contínua). ■

Teorema 5.2 (Valor intermédio). **Em CDI-I:** $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, I um intervalo e f contínua.

Se f toma os valores α, β com $\alpha < \beta$ então toma todos os valores intermédios entre α e β . ■

Exemplo 5.2.1. $f : [-2, -1] \cup [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} +1 & , \quad x \in [-2, -1] \\ -1 & , \quad x \in [1, 2] \end{cases}$$

- f é contínua;
- por exemplo f não toma o valor 0.

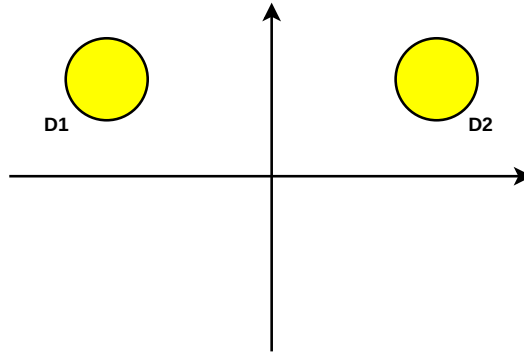
$\therefore$ Este exemplo mostra como a condição de I ser um intervalo é importante no teorema refvalintermedio. ■

Exemplo 5.2.2. $f : D_1 \cup D_2 \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \begin{cases} +1 & , (x, y) \in D_1 \\ -1 & , (x, y) \in D_2 \end{cases}$$

■

- f é contínua;



- f não toma, por exemplo, o valor 0.

Definição 5.1. $A, B \subset \mathbb{R}^n$ dizem-se separados se $\exists$ abertos $U, V \subset \mathbb{R}^n$ com $A \subset U, B \subset V$ e $U \cap V = \emptyset$.

$$(\Leftrightarrow \overline{A} \cap B = \overline{B} \cap A = \emptyset)$$

■

Definição 5.2. $W \subset \mathbb{R}^n$ diz-se conexo se não for a união de dois conjuntos separados (não vazios).

■

Exemplo 5.2.1. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ é conexo.

■

Exemplo 5.2.2. $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0, x > 1\}$ não é conexo.

■

Facto 5.1. Os subconjuntos de $\mathbb{R}$ conexos são os intervalos e os conjuntos constituídos por um único ponto.

■

Teorema 5.3. $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, f$ contínua, D conexo. Então $f(D)$ é conexo.

■

Teorema 5.4 (Valor intermédio). $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ contínua e D conexo.
Se f toma os valores de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ com $\alpha < \beta$ então toma todos os valores entre α e β . ■

Demonstração. Pelo facto 5.1 e pelo teorema 5.4, f é contínua, D conexo $\Rightarrow f(D)$ é conexo.

$f(D) \subset \mathbb{R}$ logo $f(D)$ é um intervalo ou $f(D)$ é um ponto $\longrightarrow$ impossível porque $\alpha < \beta$.

$\therefore$ Conclui-se assim que $f(D)$ é um intervalo que contém α e β . □

6 Aula de 27 de fevereiro de 2014

Diferenciabilidade em $\mathbb{R}^n$

Uma derivada é uma derivada, é uma derivada.

A Recordar 7. $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto, $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável em $a \in I$ sse $\exists f'(a) \in \mathbb{R}$ tal que:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + R_1(x)$$

$$\text{com } \lim_{x \rightarrow a} \frac{R_1(x)}{(x - a)} = 0.$$

$$\Updownarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)}{(x - a)} = 0$$



A função linear $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ com $g(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$ é a melhor aproximação linear a f na vizinhança de a .

Se, agora, $D \subset \mathbb{R}^n$ é aberto e $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, a melhor aproximação linear a f perto de $a \in D$ será uma função linear.

$$g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

da forma

$$g(x) = f(a) + Df(a)(x - a)$$

onde $Df(a) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é uma transformação linear e $Df(a)(x - a)$ denota a imagem do vetor $(x - a) \in \mathbb{R}^n$ por $Df(a)$. Em particular, nas bases canônicas de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$, $Df(a)$ será representada por uma matriz $m \times n$ com:

$$Df(a)(x - a) \in \mathbb{R}^m = \begin{bmatrix} Df(a)_{11} & \cdots & Df(a)_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Df(a)_{m1} & \cdots & Df(a)_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (x - a)_1 \\ \vdots \\ (x - a)_n \end{bmatrix}$$

Definição 6.1. $D \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $a \in D$. f diz-se diferenciável em a se $\exists$ transformação linear $Df(a) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ tal que:

$$\lim_{h \rightarrow a} \frac{\|f(x) - f(a) - Df(a)h\|}{\|h\|} = 0$$

■

Exemplo 6.1.1. $f(x, y, z) = (x + y + z, 2y + z, -x + 3z)$, $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, f é linear:

$$f(x, y, z) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Logo a melhor aproximação a f é ela própria:

$$Df(x, y, z) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

■

Teorema 6.1. $D \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $f = (f_1, \dots, f_m)$. f é diferenciável em $a \in D$ sse todas as funções coordenadas $f_1, \dots, f_m$ são diferenciáveis em a .

■

Teorema 6.2. $D \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Se f é diferenciável em a então é contínua em a .

■

Demonstração.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - Df(a)h\|}{\|h\|} = 0$$

$\Downarrow$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(f(a+h) - f(a) - \underbrace{Df(a)h}_{\lim_{h \rightarrow 0} Df(a)h=0} \right) = 0$$

$\Updownarrow$

$$\lim_{h \rightarrow 0} (f(a+h) - f(a)) = 0 \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) = f(a)$$

ou seja, f é contínua em a .

□

Outra ideia: dada $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ podemos produzir uma função de uma variável $t \in \mathbb{R}$ restringindo f a uma reta.

$$s = a + tv, \quad t \in \mathbb{R}$$

E obtendo $f(a + tv)$, o que significa $\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(a + tv)$?

Definição 6.2. $D \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, a \in D, v \in \mathbb{R}^n$

A derivada de f segundo o vetor v no ponto a define-se por:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(a + tv) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t}$$

(*caso exista*). ■

Nota 6.1. Se $f = (f_1, \dots, f_m)$ então $\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial v}(a), \dots, \frac{\partial f_m}{\partial v}(a) \right)$. ■

Exemplo 6.1. $f(x, y) = (x^2 + y^3, xy + x)$, $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $a = (0, 0)$, $v = (2, 3)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial v}(a) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f((0, 0) + t(2, 3)) \\ \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(2t, 3t) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (4t^2 + 27t^3, 6t^2 + 2t) = \\ &= (8t + 3 \times 27t^2, 12t + 2) \Big|_{t=0} = (0, 2) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0) = (0, 2)$$
■

As derivadas de f segundo os vetores $e_1, \dots, e_n$ da base canónica chamam-se derivadas parciais de f e escrevem-se:

$$\frac{\partial f}{\partial e_j}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a), \quad j = 1, \dots, n$$

7 Aula de 28 de fevereiro de 2014

Nota 7.1. $\frac{\partial f}{\partial(\lambda v)}(a) = \lambda \frac{\partial f}{\partial v}(a), \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ■

Exemplo 7.1. $f(x, y) = (e^x + \sin y, x + \cos y), f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{d}{dt} \bigg|_{t=0} (e^t + 0, t + 1) = (e^t, 1) \bigg|_{t=0} = (1, 1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) &= \frac{d}{dt} \bigg|_{t=0} f((0, 0) + t(0, 1)) = \\ &= \frac{d}{dt} \bigg|_{t=0} f(0, t) = \frac{d}{dt} \bigg|_{t=0} (1 + \sin t, 0 + \cos t) = \\ &= (\cos t, -\sin t) \bigg|_{t=0} = (1, 0) \end{aligned}$$

Quando calculamos $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$, a única coordenada que não está fixa é a coordenada x_j que é $a_j + t$. Logo, para calcularmos $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ podemos aplicar as regras de derivação usuais em x_j , como se as outras coordenadas fossem constantes.

Exemplo 7.2. $f(x, y) = x^2 y + e^y$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = (2xy + 0) \bigg|_{(1,2)} = 4$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) = (x^2 + e^y) \bigg|_{(1,2)} = 1 + e^2$$

Exemplo 7.3. $f(x, y, z) = \sin^2(xyz)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 2yz \sin(xyz) \cos(xyz)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 2xz \sin(xyz) \cos(xyz)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 2xy \sin(xyz) \cos(xyz)$$

■

Teorema 7.1. $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, D aberto, $a \in D$.

Se f é diferenciável em a , com derivada $Df(a) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, então $\forall v \in \mathbb{R}^n$, $\frac{\partial f}{\partial v}(a)$ existe e:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \underbrace{Df(a)v}_{\text{imagem de } v \text{ por } Df(a)}$$

■

Demonstração. $f(a+h) - f(a) - Df(a)h = \underbrace{R_1 h}_{\lim_{h \rightarrow 0} R_1(h)=0}$

$$\frac{f(a+tv) - f(a)}{t} = \frac{Df(a)(tv) + R_1(tv)}{t} = \frac{Df(a)(tv)}{t} + \underbrace{\frac{R_1(tv)}{t}}_{\lim_{t \rightarrow 0} = 0} \xrightarrow{t \rightarrow 0} Df(a)v = \frac{\partial f}{\partial v}(a)$$

□

Logo, nas bases canônicas de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$, a coluna j de $Df(a)$ será:

$$Df(a)e_j = \frac{\partial f}{\partial e_j}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_j}(a), \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_j}(a) \right) \text{ se } f = (f_1, \dots, f_m)$$

$$Df(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{bmatrix}$$

Esta matriz $(m \times n)$, matriz que representa $Df(a)$, denomina-se Jacobiana.

Exemplo 7.4. $f(x, y) = (x^3y, e^{xy}, x)$, $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

Como veremos mais à frente f é diferenciável

$$Df(x, y) \begin{bmatrix} 3x^2y & x^3 \\ ye^{xy} & xe^{xy} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

■

Nota 7.2. Se $Df(a)$ existe e $v = (v^1, \dots, v^n)$ então:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial v}(a) &= Df(a) = \\ &= [Df(a)] \begin{bmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{bmatrix} = Df(a) \left(\sum_{j=1}^n v^j e_j \right) = \\ &= \sum_{j=1}^n v^j Df(a) e_j = \sum_{j=1}^n v^j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \end{aligned}$$

■

Exemplo 7.5. $f(x, y) = x^2 \cos y$

Como veremos mais à frente f é diferenciável

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \cos y \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -x^2 \sin y$$

$$v = (3, 4)$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x, y) = 3 \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + 4 \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 6x \cos y - 4x^2 \sin y$$

■

Será que a existência de todas as derivadas parciais de f em a , $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$, $j = 1, \dots, n$, garante que $Df(a)$ existe?

Não!

Exemplo 7.6. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & , \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

■

vimos que $\nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$, logo f nem sequer é contínua em $(0,0) \Rightarrow \nexists Df(0,0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f((0,0) + t(1,0)) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(t,0) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f((0,0) + t(0,1)) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(0,t) = 0$$

Atenção: Aquela que seria a matriz derivada (Jacobiana) não tem um significado especial porque $\nexists$ derivada.

8 Aula de 5 de março de 2014

Teorema 8.1. $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, D aberto.

Se **todas as derivadas parciais de f existem e são contínuas em D** (ou seja, se f é de classe C^1 em D) então f é diferenciável em D . ■

Exemplo 8.1.1. $f(x, y, z) = (xyz, x^2y + \cos z)$ $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) &= (yz, 2xy) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) &= (xz, x^2) \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) &= (xy, -\sin z) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{As derivadas parciais são contínuas em} \\ \mathbb{R}^3, \text{ logo } f \text{ é de classe } C^1, \text{ logo } f \text{ é dife-} \\ \text{renciável em } \mathbb{R}^3 \end{array}$$

$$Df(x, y, z) = \begin{bmatrix} yz & xz & xy \\ 2xy & x^2 & -\sin z \end{bmatrix}$$

Tomemos por exemplo $v = (1, 4, 3)$, $a = \left(1, 2, \frac{\pi}{2}\right)$:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = Df(a)v = \begin{bmatrix} \pi & \frac{\pi}{2} & 2 \\ 4 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\pi + 6 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Se $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é um campo escalar diferenciável então:

$$Df(x) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \quad \cdots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right], \quad x \in D$$

O campo vetorial associado $\underbrace{\nabla}_{nabla} f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ chama-se gradiente de f ,

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right)$$

Exemplo 8.1. $f(x, y, z) = e^{xyz}$

$$Df(x, y, z) = \begin{bmatrix} yze^{xyz} & xze^{xyz} & xye^{xyz} \end{bmatrix}$$

f é de classe C^1 , logo é diferenciável

$$\nabla f(x, y, z) = (yze^{xyz}, xze^{xyz}, xye^{xyz})$$

Tomemos por exemplo $v = \left(\frac{1}{2}, 3, 7\right)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial v}(x, y, z) &= \underbrace{\begin{bmatrix} yze^{xyz} & xze^{xyz} & xye^{xyz} \end{bmatrix}}_{Df(x, y, z)} = \\ &= \nabla f(x, y, z) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \left(\frac{yz}{2} + 3xz + 7xy\right) e^{xyz} \end{aligned}$$

■

Se $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é um campo escalar diferenciável, $v \in \mathbb{R}^n$, $a \in D$, então:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial v}(a) &= Df(a)v = \\ &= \begin{bmatrix} Df(a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \end{bmatrix} = \nabla f(a)v = \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)v_j = \|\nabla f(a)\| \cdot \|v\| \cdot \cos \theta \end{aligned}$$

Fixada $\|v\|$, por exemplo com $\|v\| = 1$, $\frac{\partial f}{\partial v}(a)$ é máxima quando $\theta = 0$, ou seja $\nabla f(a)$ dá-nos a direção (e sentido) de crescimento máximo de f em a .

Por outro lado, se $v \perp \nabla f(a)$ então $\frac{\partial f}{\partial v}(a) = 0$

Exemplo 8.2. $f(x, y) = x^2 + y^2$

$$\nabla f(x, y) = (2x, 2y) = 2(x, y)$$

É radial

Em qualquer ponto (x, y) a dimensão de crescimento máximo é radial. ■

Nota 8.1. $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $f = (f_1, \dots, f_m)$

$$Df(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\nabla f_1(a) - \\ -\nabla f_2(a) - \\ \vdots \\ -\nabla f_m(a) - \end{bmatrix}$$

■

Nota 8.2. $f, g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, diferenciáveis, então $f + g$ é diferenciável e

$$D(f + g)(a) = Df(a) + Dg(a)$$

■

Nota 8.3. $f, g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ campos escalares diferenciáveis, então:

$$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$$

■

Derivada da função composta

A Recordar 8. Em CDI-I: $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciáveis, então:

$$[(g \circ f)'(a)] = [g'(f(a))][f'(a)], a \in \mathbb{R}$$

■

Teorema 8.2. $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $g : E \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^k$, com $f(D) \subset E$. Se f é diferenciável em $a \in D$ e se g é diferenciável em $f(a)$, então $g \circ f$ é diferenciável em a e:

$$\underbrace{D(g \circ f)(a)}_{k \times n} = \underbrace{Dg(f(a))}_{k \times m} \times \underbrace{Df(a)}_{m \times n}$$

“A derivada da composta é a composta das derivadas”

■

Demonstração. Idêntica à de CDI-I

□

9 Aula de 6 de março de 2014

Exemplo 9.1. $f(x, y) = (x + y, x - y, 2x)$, $g(a, b, c) = abe^c$

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, g \circ f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$g \circ f(x, y) = g(f(x, y)) = g(x + y, x - y, 2x) = (x^2 - y^2)e^{2x}$$

$$D(g \circ f)(x, y) = \begin{bmatrix} 2xe^{2x} + 2(x^2 - y^2)e^{2x} & -2ye^{2x} \end{bmatrix}$$

Usando a derivada da composta,

$$Df(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, Dg(a, b, c) = \begin{bmatrix} be^c & ae^c & abe^c \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} D(g \circ f)(x, y) &= Dg \Big|_{(a,b,c)=f(x,y)=(x+y,x-y,2x)} Df(x, y) = \\ &= \begin{bmatrix} (x-b)e^{2x} & (x+y)e^{2x} & (x^2-y^2)e^{2x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 2xe^{2x} + 2x(x^2 + y^2)e^{2x} & -2ye^{2x} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

■

Exemplo 9.2. $f(x, y) = (xy, x^2, y^2)$, $g(a, b, c) = (\sin b, ac)$

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, g \circ f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$Df(x, y) = \begin{bmatrix} y & x \\ 2x & 0 \\ 0 & 2y \end{bmatrix}, Dg(a, b, c) = \begin{bmatrix} 0 & \cos b & 0 \\ c & 0 & a \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} D(g \circ f) &= Dg(f(x, y))Df(x, y) = \\ &= Dg \Big|_{(a,b,c)=f(x,y)=(xy,x^2,y^2)} Df(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & \cos x^2 & 0 \\ y^2 & 0 & xy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y & x \\ 2x & 0 \\ 0 & 2y \end{bmatrix} = \\ &\begin{bmatrix} 2x \cos x^2 & 0 \\ y^3 & xy^2 + 0 + 2xy^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \cos x^2 & 0 \\ y^3 & 3xy^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

As entradas desta matriz são obtidas da seguinte forma (*Tomemos o exemplo da entrada 1,1*):

$$2x \cos x^2 = 0y + \cos x^2 \times 2x + 0 \times 0$$

$$\Updownarrow$$

$$2x \cos x^2 = \frac{\partial g_1}{\partial a} \overbrace{\frac{\partial f_1}{\partial x}}^{=a} + \frac{\partial g_1}{\partial b} \overbrace{\frac{\partial f_2}{\partial x}}^{=b} + \frac{\partial g_1}{\partial c} \overbrace{\frac{\partial f_3}{\partial x}}^{=c}$$

$$g \circ f(x, y) = g(f(x, y)) \rightsquigarrow (a, b, c) = f(x, y) \rightsquigarrow \begin{cases} a = f_1(x, y) \\ b = f_2(x, y) \\ c = f_3(x, y) \end{cases}$$

$$x \longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} \right\} \longrightarrow g_1$$

■

Em geral, para $f = \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $g : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^k$, $g \circ f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$

$$(g \circ f) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(f(x)) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_m}(f(x)) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_k}{\partial y_1}(f(x)) & \cdots & \frac{\partial g_k}{\partial y_m}(f(x)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(f(x)) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(f(x)) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(f(x)) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(f(x)) \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} y = f(x) \\ x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m \\ g \circ f(x) = g(f(x)) \end{cases}$$

Regra da cadeia

$$\frac{\partial (g \circ f)_i}{\partial x_j} = \text{linha } i \text{ de } Dg \times \text{coluna } j \text{ de } Df = \sum_{l=1}^m \left(\frac{\partial g_i}{\partial y_l}(f(x)) \overbrace{\frac{\partial f_l}{\partial x_j}}^{y_l(x)} \right)$$

$$y = f(x) \longleftrightarrow y_l = f_l(x)$$

$$x_j \left\{ \begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{array} \right\} g_i$$

Exemplo 9.3. $\varphi(x, t) = f(x - ct)$

onda que se move para a direita com velocidade c

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f(u)$$

$$u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$u(x, t) = x - ct$$

$$\varphi : (x, t) \mapsto f(u(x, t)) = f(x - ct)$$

$$x \longrightarrow u \longrightarrow f$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{df}{du} \frac{\partial u}{\partial x} = f'(x - ct) \times 1 = f'(x - ct)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left[f'(\underbrace{x - ct}_u) \right] = \frac{df'}{du} \frac{\partial u}{\partial x} = f''(x - ct) \times 1 = f''(x - ct)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{df}{du} \frac{\partial u}{\partial t} = -c f'(x - ct)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right] = \frac{\partial}{\partial t} [-c f'(x - ct)] = -c \frac{df'}{du} \frac{\partial u}{\partial t} = c^2 f''(x - ct)$$

$\Downarrow$

$$c^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0$$

$\downarrow$

Equação das ondas

■

10 Aula de 7 de março de 2014

Exemplo 10.1. $\varphi(x, y) = f(\overbrace{x+y}^u, \overbrace{x^2-y^2}^v)$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}(x+y, x^2-y^2) + 2x \frac{\partial f}{\partial v}(x+y, x^2-y^2)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}(x+y, x^2-y^2) - 2y \frac{\partial f}{\partial v}(x+y, x^2-y^2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 1 & , & & \frac{\partial v}{\partial x} &= 2x \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= 1 & , & & \frac{\partial v}{\partial y} &= -2y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial f}{\partial u}(\overbrace{x+y}^u, \overbrace{x^2-y^2}^v) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[2x \frac{\partial f}{\partial v}(\overbrace{x+y}^u, \overbrace{x^2-y^2}^v) \right] = \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right) \frac{\partial v}{\partial x} \right] + 2 \frac{\partial f}{\partial v} + 2x \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right) \frac{\partial v}{\partial x} \right] = \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 2x \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} + 2 \frac{\partial f}{\partial v} + 2x \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + 4x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \end{aligned}$$

■

Para funções u, v diferenciáveis,

$$\star(u(x, y), v(x, y))$$

$$\frac{\partial \star}{\partial x} = \frac{\partial \star}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \star}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \star}{\partial y} = \frac{\partial \star}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \star}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}$$

A Recordar 9 (Teorema de Lagrange). Em CDI-I: $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, diferenciável em $]a, b[$. $\exists c \in [a, b] : f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ ■

$f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, D aberto, f diferenciável. Consideremos o segmento de reta $\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ onde $\gamma(t) = a + t(b - a)$, $\gamma(0) = a$, $\gamma(1) = b$.

Vamos tomar a restrição de f ao segmento de reta, $\phi : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $\phi(t) = f \circ \gamma(t) = f(a + t(b - a))$

Como f , γ são diferenciáveis, $f \circ \gamma = \phi$ também é:

$$\frac{d\phi}{dt} = Df(\gamma(t))D\gamma(t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\gamma(t)) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_m}(\gamma(t)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1'(t) \\ \vdots \\ \gamma_n'(t) \end{bmatrix} = \nabla f(\gamma(t))\gamma'(t)$$

, onde $\gamma'(t) = (\gamma_1'(t), \dots, \gamma_n'(t))$ é o vetor velocidade.

$$\gamma'(t) = b - a$$

Temos

$$\phi(0) = f(a) \quad ; \quad \phi(1) = f(b)$$

Pelo Teorema de Lagrange $\exists t_0 \in [0, 1]$:

$$\phi(1) - \phi(0) = \phi'(t_0) - (1 - 0) \Leftrightarrow f(b) - f(a) = \nabla f(\gamma(t_0))(b - a)$$

Teorema 10.1 (Lagrange). $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ campo escalar diferenciável; $a, b \in D$ tal que o segmento de reta que os une está contido em D , $\exists c$ e segmento de reta tal que:

$$f(b) - f(a) = \nabla f(c) \cdot (b - a)$$



11 Aula de 10 de março de 2014

Gradientes e conjuntos de nível

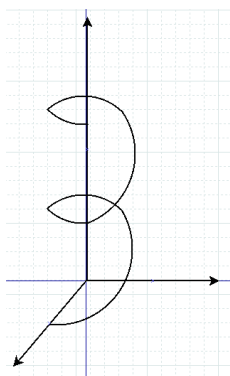
Definição 11.1. Um caminho é uma função contínua $\gamma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$. ■

Exemplo 11.1.1.

$$\gamma(\theta) = \underbrace{(\cos \theta, \sin \theta)}_{(x(\theta), y(\theta))}, \theta \in [0, 2\pi]$$

A equação $x(\theta)^2 + y(\theta)^2 = 1$ representa um conjunto de pontos a uma distância de uma unidade da origem em função de θ , ou seja, uma circunferência que é percorrida no sentido anti-horário. ■

Exemplo 11.1.2. $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $t \in [0, 4\pi]$



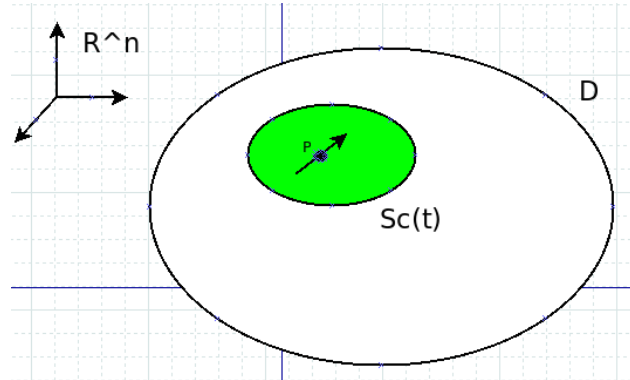
Definição 11.2. $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ campo escalar. Um conjunto de nível de f é um conjunto da forma:

$$S_c(f) = \{x \in D : f(x) = c\}$$

Dar um caminho $\gamma(t)$ é o mesmo que dar uma posição em $\mathbb{R}^n$ em função do tempo t . Se γ for diferenciável, $\gamma'(t)$ será o vetor velocidade no instante t e no ponto $\gamma(t)$. $\gamma'(t)$ é tangente a $\gamma(t)$. ■

Exemplo 11.2.1. $f(x, y) = x^2 + 3y^2$. Os conjuntos de nível de f , $S_c(f)$ com $c > 0$, são elipses. $S_c(f) = \emptyset$, $c < 0$ ■

$f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ campo escalar diferenciável.



$$S_c = \{(x, y) \in D : f(x, y) = c\}$$

- $S_c(f) \subset D$ conjunto de nível de f , $p \in S_c(t)$;
- Seja $\gamma(t)$ um caminho **contido** em $S_c(f)$, com $\gamma(0) = p$;
- Tomemos $f(\gamma(t)) = f \circ \gamma(t)$. Então $f \circ \gamma(t) = c, \forall t$;
- $\left. \frac{df \circ \gamma}{dt} \right|_{t=0} = 0 = Df(\gamma(0))D\gamma(0) = \nabla f(p)\gamma'(0) = 0$;
- $\gamma'(0)$ é tangente a $S_c(f)$ em p porque $\gamma(t)$ está contida em $S_c(f)$;
- O argumento é válido para todos os vetores $\gamma'(0)$ tangentes a $S_c(f)$ em p
 $\Rightarrow \nabla f(p)$ é $\perp$ a $S_c(f)$ em p .

Nota 11.1. $\frac{\partial f}{\partial \gamma'(0)}(f) = \nabla f(p)\gamma'(0) = 0$ porque f não varia ao longo de $S_c(f)$. ■

Exemplo 11.1. $f(x, y) = (x^2 + y^2)$.
Conjunto de nível:

- $c > 0$: $S_c(f) =$ circunferência de raio $\sqrt{c}$;
- $c = 0$: $S_c(f) = \{(0, 0)\}$;
- $c < 0$: $S_c(f) = \emptyset$.

$$\nabla f(x, y) = (2x, 2y) = \underbrace{2(x, y)}_{2 \times \text{raio}}$$

$\nabla f \perp$ conjunto de nível $\Leftrightarrow$ os raios são $\perp$ circunferências. ■

Exemplo 11.2. Determine a reta normal à elipse de equação $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{18} = 1$, no ponto $(2, 3)$.

Seja $f(x, y) = \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{18}$. Então $E = S_1(t)$.

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{x}{4}, \frac{y}{9} \right) \quad ; \quad \nabla f(2, 3) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \right)$$

A reta normal a E em $(2, 3)$ é: $(2, 3) + t \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \right)$, $t \in \mathbb{R}$.

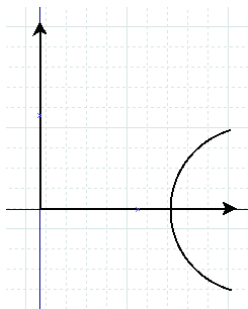
A reta tangente a E em $(2, 3)$ é $(2, 3) + t \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{2} \right)$, $t \in \mathbb{R}$. ■

Exemplo 11.3. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$
 $S_c(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = c\}$ ■

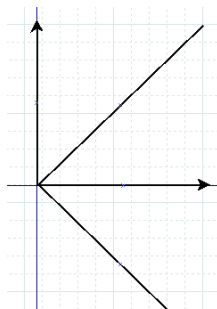
Coordenadas cilíndricas em $\mathbb{R}^3$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0 \quad \begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

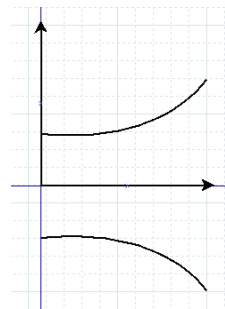
$$x^2 + y^2 - z^2 = c \longleftrightarrow \rho^2 - z^2 = c$$



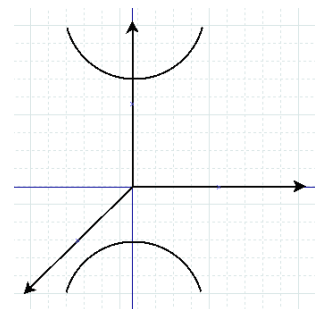
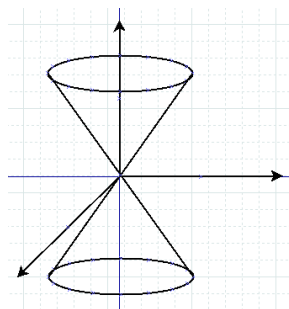
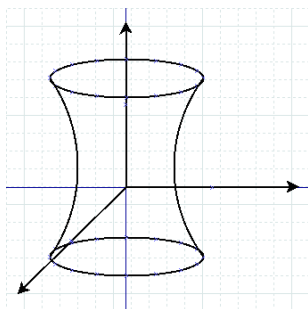
$$\rho^2 = c + z^2, c > 0$$



$$\rho = \pm z, c = 0$$



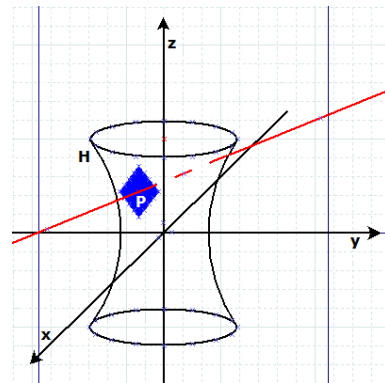
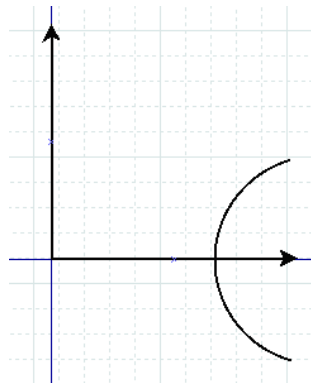
$$z^2 = |c| + \rho^2$$



12 Aula de 12 de março de 2014

Exemplo 12.1. Seja H o hiperbolóide $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ e $P = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{3}) \in H$. Determine a reta normal e o plano tangente a H em P .

Tem-se:



$$\begin{aligned}\rho^2 - z^2 &= 1 \\ \rho &= \sqrt{x^2 + y^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(x, y, z) &= x^2 + y^2 - z^2 \\ H &= S_1(f) \\ \nabla f(x, y, z) &= (2x, 2y, -2z) \\ \nabla f(P) &= (2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, -2\sqrt{3})\end{aligned}$$

A reta normal a H em P é:

$$(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{3}) + t(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, -2\sqrt{3}), t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow p + t\nabla f(p)$$

O plano tangente a H em P é:

$$(a - \sqrt{2}, b - \sqrt{2}, c - \sqrt{3}) \cdot (2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, -2\sqrt{3}) = 0$$

$$((a, b, c) - p) \cdot \nabla f(P) = 0$$

■

Exemplo 12.2. $V(x, y, z) = G\frac{Mm}{R}$, G, M, m , constantes.

Potencial gravítico de Newton

$$\boxed{R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \rightarrow \text{raio}$$

$$V : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$$

Os conjuntos de nível de V chamam-se superfícies equipotenciais, e são superfícies esféricas.

$$\underbrace{\nabla V(x, y, z)}_{\left(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial z}\right)} = \frac{GMm}{R^3}(x, y, z) = \frac{GMm}{R^2} \left(\frac{\vec{R}}{R} \right)$$

$(-1) \times$ força gravítica

■

Definição 12.1 (Derivada de ordem superior). $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, D aberto, e tal que as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x_j} : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ também são diferenciáveis. Podemos tomar:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right) : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

se as $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ também são diferenciáveis temos $\frac{\partial^3 f}{\partial x_k \partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)$, etc. até derivadas de ordem N .

$$\frac{\partial^N f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_N}}$$

■

Exemplo 12.0.1. $f(x, y, z) = x^2 y e^z$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (x^2 e^z) = 2x e^z$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial z \partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right) = 2x e^z$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right) = 2e^z$$

■

Definição 12.2. $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ diz-se de classe C^k , $k \geq 1$, se todas as suas derivadas parciais de ordem k existem e são contínuas em D . (escreve-se $f \in C^k(D)$)

Se $f \in C^k(D)$, $\forall k \geq 1$, f diz-se de classe C^∞ , ou seja $f' \in C^\infty(D)$.

■

Exemplo 12.2.1. $f(x, y) = x \sin(xy)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 \cos(xy)) = 2x \cos(xy) - yx^2 \sin(xy)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}(\sin(xy) + xy \cos(xy)) = \\ &= x \cos(xy) + x \cos(xy) - yx^2 \sin(xy) = 2x \cos(xy) - yx^2 \sin(xy) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

■

Teorema 12.1 (Schwarz (2)). $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, D aberto, $f \in C^k(D)$, $k \geq 2$.
Então $\forall a \in D$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$, $i, j = 1, \dots, n$

■

Se $f \in C^k(D)$ com $k > 2$, por aplicação sucessiva do Teorema de Schwarz obtemos:

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}} = \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_2} \partial x_{i_1} \partial x_{i_3} \cdots \partial x_{i_k}} = \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_{k-1}}} = \cdots$$

Exemplo 12.1.1. $f \in C^4(\mathbb{R}^3)$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y \partial z} = \frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y \partial z \partial x} = \frac{\partial^4 f}{\partial y \partial z \partial x^2} = \text{etc}$$

■

Fórmula de Taylor para campos escalares em $\mathbb{R}^n$

A Recordar 10. Em CDI-I: $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(a+h) = \sum_{j=0}^N \frac{f^{(j)}(a)}{j!} h^j + \underbrace{R_N(h)}_{\text{ERRO}}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{R_N(h)}{|h|^N} = 0$$

■

13 Aula de 13 de março de 2014

$D \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^\infty(D)$, $a \in D$, $x \in D$, $x = a + h$

$$\begin{aligned}\gamma : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ \gamma(t) &\longmapsto a + th\end{aligned}$$

$$\begin{cases} \gamma(0) = a \\ \gamma(1) = a + h = x \end{cases}$$

$\gamma'(t) = h$ vetor velocidade.

Vamos tomar $\phi : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ com $\phi(t) = f \circ \gamma(t) = f(a + th)$

$$f \in C^\infty(D), \gamma \in C^\infty([0, 1]) \Rightarrow \phi \in C^\infty([0, 1])$$

$$\phi(0) = f(a) \quad , \quad \phi(1) = f(a + h) = f(x)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(a + th) \frac{d\gamma^j}{dt} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(a + th) h_j = \nabla f(a + th) \cdot h$$

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a + th) h_i h_j$$

$$\frac{d^3\phi}{dt^3} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^3 f}{\partial x_k \partial x_i \partial x_j}(a + th) h_k h_i h_j$$

No caso geral:

$$\frac{d^N\phi}{dt^N} = \sum_{i_1, \dots, i_N=1}^n \frac{\partial^N f(a + th)}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_N}} h_{i_1} \dots h_{i_N}$$

Obtemos:

$$\begin{aligned}\phi(1) &= \phi(0) + \phi'(0) \times 1 + \frac{1}{2} \phi''(0) \times 1^2 + \dots + R_N(1) \\ &= \sum_{j=0}^N \frac{\phi^{(j)}(0)}{j!} 1^j + R_N(1) \\ &= \sum_{j=0}^N \frac{\phi^{(j)}(0)}{j!} + R_N(1)\end{aligned}$$

$\Updownarrow$

$$f(a+h) = f(a) + \nabla f(a) \cdot h + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j + \cdots + \frac{1}{N!} \sum_{i_1, \dots, i_N=1}^n \frac{\partial^N f(a)}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_N}} h_{i_1} \cdots h_{i_N} + R_N(1)$$

Teorema 13.1 (Fórmula de Taylor). $D \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, com $f \in C^{N+1}(D)$. Sejam $a, a+h \in D$ tal que o segmento de reta que une a e $a+h$ está contido em D . Então:

$$f(a+h) = f(a) + \nabla f(a) \cdot h + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) h_i h_j + \cdots + \frac{1}{N!} \sum_{i_1, \dots, i_N=1}^n \frac{\partial^N f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_N}}(a) h_{i_1} \cdots h_{i_N} + R_N(h)$$

, onde $\exists t_0 \in [0, 1]$ com

$$R_N(h) = \frac{1}{(N+1)!} \sum_{i_1, \dots, i_{N+1}=1}^n \frac{\partial^{N+1} f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_{N+1}}}(a + t_0 h) h_{i_1} \cdots h_{i_{N+1}}$$

■

Exemplo 13.1.1. $f(x, y) = e^{(x+y)}$

$$e^z = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \cdots$$

$$f(x, y) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(x+y)^j}{j!} = 1 + (x+y) + \frac{1}{2}(x+y)^2 + \frac{1}{3!}(x+y)^3 + \cdots$$

$a = (0, 0)$, os termos de ordem $\leq N$ desta expansão dão o polinómio de Taylor de ordem N de f em torno de $a = (0, 0)$.

$$a = (0, 0); \quad \underbrace{a+h}_{x''=(x_1, x_2)=(x, y)} = h = (h_1, h_2) = (x, y); \quad \begin{cases} h_1 = x \\ h_2 = y \end{cases}$$

$$\frac{\partial^{i+j} f}{\partial y^j \partial x^i}(0, 0) = f(0, 0) = 1, \quad \forall i, j$$

- **Ordem 0:** $f(0, 0) = 1$;
- **Ordem 1:** $\nabla f(0, 0) \cdot h = (1, 1)(x, y) = (x, y)$;

- **Ordem 2:** $\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j = \frac{1}{2} [\underbrace{1x^2}_{i=j=1} + \underbrace{1xy}_{i=2;j=1} + \underbrace{1xy}_{i=1;j=2} + \underbrace{1y^2}_{i=j=2}] =$
 $= \frac{1}{2} [x^2 + 2xy + y^2] = \frac{1}{2} (x + y)^2$

■

14 Aula de 14 de março de 2014

Extremos

A Recordar 11. $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, contínua, D compacto (= limitado e fechado) $\Rightarrow f$ tem máximo e mínimo em D . ■

A Recordar 12. Em CDI-I: $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, classe C^1 . Se f tem um extremo local num ponto a **interior** a I então $f'(a) = 0$. ■

$f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^1(D)$, D aberto.

Suponhamos que f tem um extremo local (por exemplo um máximo local) em $a \in D$.

Seja $\gamma(t)$ um caminho contido em D com $\gamma(0) = a$. γ de classe C^1 .

Então a função $f \circ \gamma(t)$ tem um máximo local em $t = 0$. ($f \circ \gamma(t)$ de classe C^1)

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f \circ \gamma(t) = 0 \Rightarrow \nabla f(\gamma(0)) \cdot \gamma'(0)$$

O argumento é válido para qualquer caminho $\gamma(t)$ seja qual for $\gamma'(0) \Rightarrow \nabla f(a) \cdot \gamma'(0) = 0, \forall \gamma'(0) \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \nabla f(a) = 0$.

Definição 14.1. $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^1(D)$. Se $\nabla f(a) = 0$, a diz-se um ponto crítico ou ponto de estacionaridade. Nesse caso a pode ser um extremo local (máximo ou mínimo) ou ponto em sela. ■

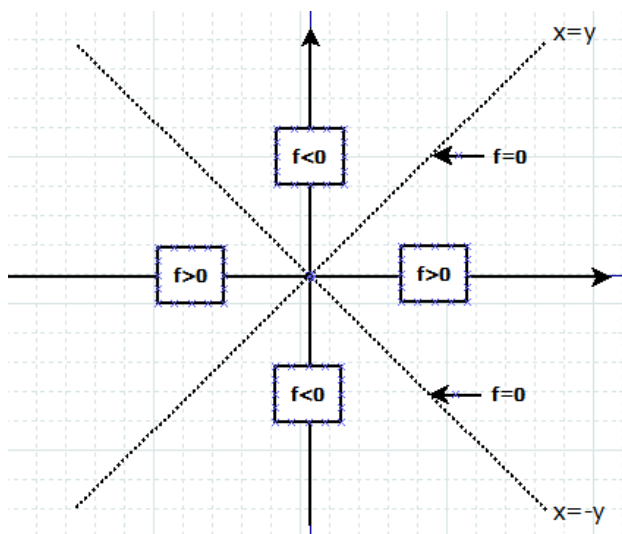
Como obtivemos acima,

Teorema 14.1. $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^1(D)$, D aberto. Se $a \in D$ é extremo local de f então $\nabla f(a) = 0$. ■

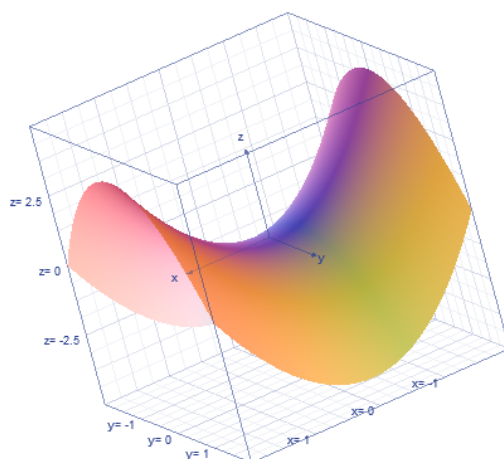
Exemplo 14.1.1. $f(x, y) = x^2 - y^2$, $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$

$$\nabla f(x, y) = (2x, -2y) = (0, 0) \Rightarrow (x, y) = (0, 0)$$

$(0, 0)$ é o único ponto crítico de f .



$\Rightarrow$ $(0, 0)$ não é um máximo local nem um mínimo local

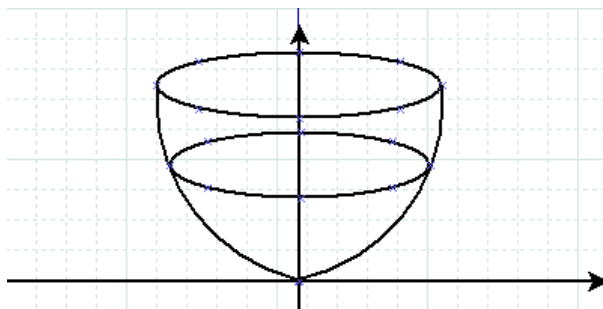


$(0, 0)$ diz-se um ponto em sela. ■

Exemplo 14.1.2. $f(x, y) = x^2 + y^2$; $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$

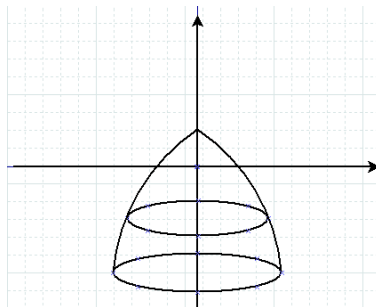
$\nabla f(x, y) = (2x, 2y) = (0, 0) \Rightarrow (x, y) = (0, 0)$ único ponto crítico.

$f(x, y) \geq 0 = f(0, 0)$; $(0, 0)$ é mínimo absoluto.



Exemplo 14.1.3. $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2; f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$

$\nabla f(x, y) = (2x(y - 1), 2y(x - 1)) = (0, 0) \Rightarrow (x, y) = (0, 0) \Rightarrow f(x, y) = 1 \geq f(x, y) \rightsquigarrow (0, 0)$ é máximo absoluto.



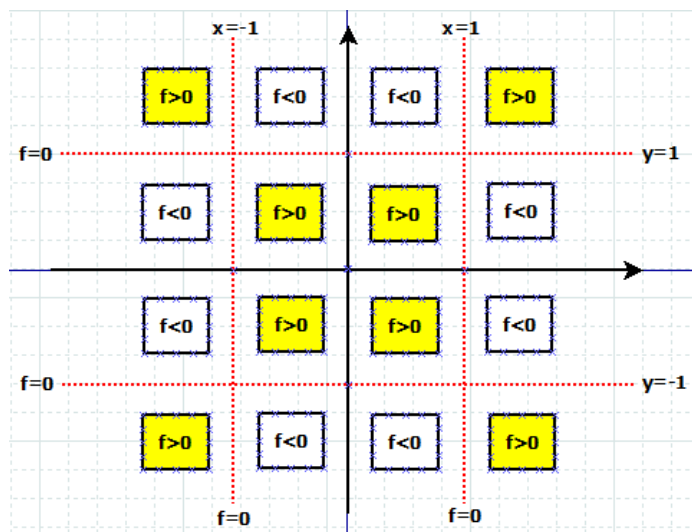
Exemplo 14.1.4. $f(x, y) = (x^2 - 1)(y^2 - 1); f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$

$$\nabla f(x, y) = (2x(y^2 - 1), 2y(x^2 - 1)) = (0, 0)$$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} 2x(y^2 - 1) = 0 \\ 2y(x^2 - 1) = 0 \end{cases} \begin{cases} x = 0 \\ y = \pm 1 \\ y = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases} \rightsquigarrow \{x = 0 \vee y = \pm 1\} \wedge \{y = 0 \vee x = \pm 1\}$$

5 pontos críticos: $(0, 0), (1, 1), (-1, -1), (1, -1), (-1, 1)$



$(\pm 1, \pm 1)$ são pontos em sela.

Seja $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$

Q é compacto $\Rightarrow \exists$ máximo, mínimo de f em Q .

No interior de Q só existe um ponto crítico de f que é $(0, 0)$.

Na fronteira de Q f é constante, vale 0, logo como $f(0, 0) = 1 > 0$, $(0, 0)$ é máximo local e o mínimo de f em Q é atingido na fronteira. ■

15 Aula de 17 de março de 2014

Definição 15.1. $f \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, D aberto, $f \in C^2(D)$.

A matriz $n \times n$ (simétrica) das segundas derivadas de f em a chama-se matriz Hessiana de f em a . Assim, pelo teorema 12.1 (de Schwarz) tem-se:

$$[Hf(a)]_{ij} = \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_j \partial x_i} = [Hf(a)]_{ji}$$

■

A matriz $Hf(a)$ define uma forma quadrática:

$$H(f) \rightarrow H_f?$$

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ h &\mapsto \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j \end{aligned}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{bmatrix} h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Hf(a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \end{bmatrix}$$

Sendo simétrica, a matriz $Hf(a)$ é sempre diagonalizável e tem n valores próprios $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$.

Escrevendo $h \in \mathbb{R}^n$ na base própria de $Hf(a)$, $h = (\tilde{h}_1, \dots, \tilde{h}_n)$ temos:

$$\begin{bmatrix} h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Hf(a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \tilde{h}_i^2$$

A forma quadrática definida por $Hf(a)$ é:

1. **Definida positiva** (i.e.: $h^T Hf(a) h > 0, \forall h \neq 0$) sse $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$;
2. **Definida negativa** (i.e.: $h^T Hf(a) h < 0, \forall h \neq 0$) sse $\lambda_1, \dots, \lambda_n < 0$;
3. **Indefinida** (i.e. $\exists h, \hat{h} \in \mathbb{R}^n : h^T Hf(a) h > 0$ e $\hat{h}^T Hf(a) h > 0$) $\Leftrightarrow \exists \lambda_i > 0, \exists \lambda_j < 0$;
4. **Semi-definida positiva** (i.e. $h^T Hf(a) h \geq 0, \forall h \in \mathbb{R}^n$) $\Leftrightarrow \lambda_i \geq 0, i = 1, \dots, n$;

5. **Semi-definida negativa** (i.e. $h^T Hf(a)h \leq 0, \forall h \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \lambda_i \leq 0, i = 1, \dots, n$;

* (4), (5) sse $Hf(a) \neq 0$

$D \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$; $f \in C^2(D)$.

Seja $a \in D$ um ponto crítico de f , $\nabla f(a) = 0$.

A fórmula de Taylor para f em a dá-nos:

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + \underbrace{\nabla f(a) \cdot h}_{=0} + R_1(a+h) = \\ &= f(a) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f(a+th)}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j = \\ &= f(a) + \frac{1}{2} h^T Hf(a+th)h, \quad t \in [0, 1] \end{aligned}$$

Se $Hf(a)$ é definida positiva, definida negativa ou indefinida então para $\|h\|$ suficientemente pequeno, por continuidade, $Hf(a+th)$ também será, respetivamente, definida positiva, definida negativa ou indefinida ($\Rightarrow a$ será mínimo local, máximo local ou ponto em sela, respetivamente).

Se $Hf(a)$ é semi-definida positiva então não pode ser máximo local porque $Hf(a+th)$ tem valores próprios > 0 para $\|h\|$ suficientemente pequena. Se $Hf(a)$ é semi-definida negativa então não pode ser mínimo local.

Teorema 15.1. $D \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^2(D)$. Seja $a \in D$ um ponto crítico de f . Então:

1. $Hf(a)$ **definida positiva** $\Rightarrow a$ é um mínimo local;
2. $Hf(a)$ **definida negativa** $\Rightarrow a$ é um máximo local;
3. $Hf(a)$ **indefinida** $\Rightarrow a$ é um ponto em sela;
4. $Hf(a)$ **semi-definida positiva** $\Rightarrow a$ não é um máximo local;
5. $Hf(a)$ **semi-definida negativa** $\Rightarrow a$ não é um mínimo local.

■

Exemplo 15.1.1. $f(x, y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$
 $\nabla f(x, y) = (6x^2 + y^2 + 10x, 2xy + 2y) = (0, 0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6x^2 + y^2 + 10x = 0 \\ 2(x+1)y = 0 \end{cases} \begin{cases} x = -1 \rightsquigarrow -4 + y^2 = 0 \\ y = 0 \rightsquigarrow 6x^2 + 10x = 0; x(10 + 6x) = 0 \end{cases} \begin{cases} y = 2 \\ y = -2 \end{cases} \begin{cases} x = 0 \\ x = -\frac{5}{3} \end{cases}$$

4 pontos críticos: $(-1, \pm 2), (0, 0), (-\frac{5}{3}, 0)$

$$Hf(x, y) = \begin{bmatrix} 12x + 10 & 2y \\ 2y & 2x + 2 \end{bmatrix}$$

$$\bullet Hf(0, 0) = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Valores próprios: $\lambda_1 = 10, \lambda_2 = 2$ $\lambda_1, \lambda_2 > 0 \Rightarrow (0, 0)$ é um mínimo local;

$$\bullet Hf\left(-\frac{5}{3}, 0\right) = \begin{bmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -\frac{10}{3} + 2 \end{bmatrix}$$

Valores próprios: $\lambda_1 = -10, \lambda_2 = -\frac{4}{3}$ $\lambda_1, \lambda_2 < 0 \Rightarrow \left(-\frac{5}{3}, 0\right)$ é máximo local;

$$\bullet Hf(-1, \pm 2) = \begin{bmatrix} -2 & \pm 4 \\ \pm 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -2 - \lambda & \pm 4 \\ \pm 4 & -\lambda \end{vmatrix} &= \lambda(2 + \lambda) - 16 = 0 \\ \Leftrightarrow \lambda^2 + 2\lambda - 16 &= 0 \\ \Leftrightarrow \lambda &= \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 64}}{2} \\ \Leftrightarrow \lambda_+ &= \frac{-2 + \sqrt{68}}{2} > 0 \vee \lambda_- = \frac{-2 - \sqrt{68}}{2} < 0 \end{aligned}$$

Os pontos $(-1, \pm 2)$ são pontos em sela.

■

16 Aula de 19 de março de 2014

Exemplo 16.1. $f(x, y, z) = \frac{1}{2}x^2 + y^2 + \sqrt{6}xy + (4z^3 - 3z^4)$

$$\nabla f(x, y, z) = (x + \sqrt{6}y, 2y + \sqrt{6}x, 12(z^2 - z^3)) = (0, 0, 0)$$

$$\rightsquigarrow \left\{ \begin{array}{l} x + \sqrt{6}y = 0 \\ 2y + \sqrt{6}x = 0 \end{array} \right\} x - \sqrt{6}y \rightsquigarrow 2y - 6y = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = 0$$
$$\left\{ \begin{array}{l} 12z^2(1 - z) = 0 \\ z = 0 \\ z = 1 \end{array} \right.$$

2 pontos críticos: $(0, 0, 0), (0, 0, 1)$.

$$Hf(x, y, z) = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{6} & 0 \\ \sqrt{6} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 24z - 36z^2 \end{bmatrix}$$

Um valor próprio é $24z - 36z^2$.

Os valores próprios de $\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & 2 \end{bmatrix}$ são dados por:

$$\begin{aligned} \left| \begin{array}{cc} 1 - \lambda & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & 2 - \lambda \end{array} \right| = 0 &\Leftrightarrow (1 - \lambda)(2 - \lambda) - 6 = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} \left\{ \begin{array}{l} \lambda = 4 \\ \lambda = 1 \end{array} \right. \end{aligned}$$

No ponto $(0, 0, 0)$: $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 24z - 36z^2 \Big|_{z=0} = 0$

$(0, 0, 0)$ é um ponto em sela.

No ponto $(0, 0, 1)$: $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 24z - 36z^2 \Big|_{z=1} = -12$

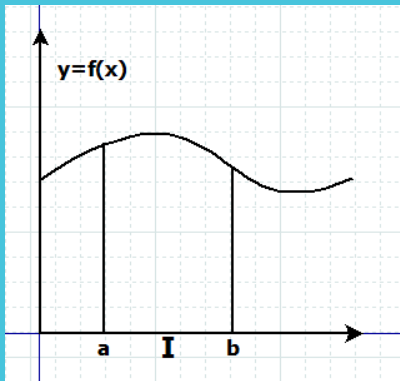
$(0, 0, 1)$ é um ponto em sela.

■

Integrais em $\mathbb{R}^n$

Um integral é um integral, é um integral.

A Recordar 13. Em CDI-I: $I = [a, b]$ intervalo compacto, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$



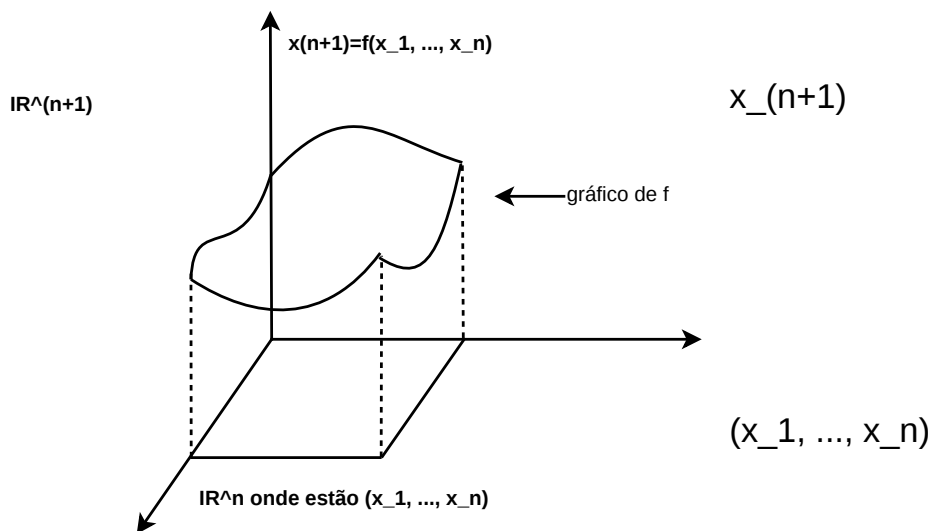
$$\int_a^b f(x)dx = \int_I f = \text{área debaixo do gráfico}$$

$I = [a, b]$ é a região de integração.
 f é a função integranda.

■

Em CDI-II: $I \subset \mathbb{R}^n$ compacto, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

O gráfico de f está contido em $\mathbb{R}^{n+1}$

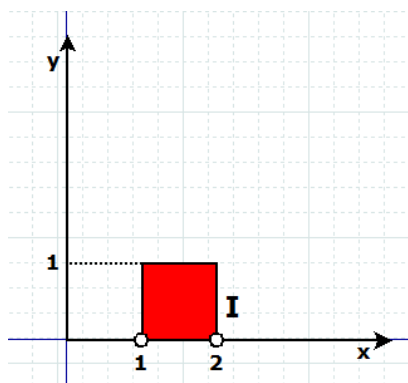


Ideia: $\int_I f = \text{Volume-}(n-1) \text{ debaixo do gráfico.}$

As nossas medidas de volume- n em $\mathbb{R}^n$ vão ser os nossos intervalos.

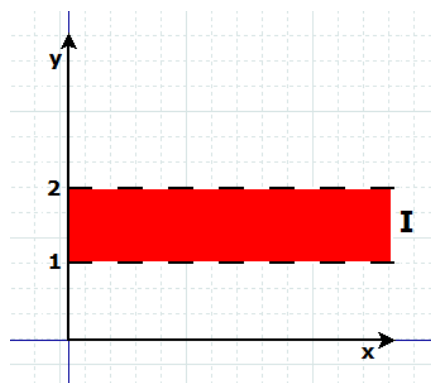
Definição 16.1. Um conjunto $I \subset \mathbb{R}^n$ diz-se um intervalo se $I = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n$, onde cada I_j é um intervalo em $\mathbb{R}$. ■

Exemplo 16.1.1.



$$I =]1, 2[\times]0, 1]$$

Exemplo 16.1.2.



$$I = [0, +\infty[\times]1, 2[\subset \mathbb{R}^2$$



I será aberto, fechado ou limitado sse todas as suas arestas $I_1, \dots, I_n$, forem respetivamente abertas, fechadas ou limitadas.

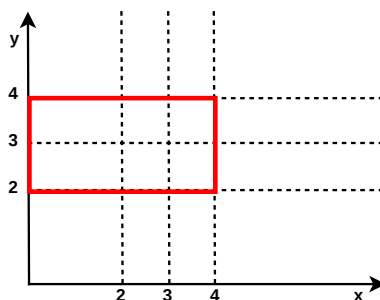
Nota 16.1. Um conjunto com um ponto em $\mathbb{R}^n$ não é um intervalo. Um intervalo em $\mathbb{R}$ tem sempre comprimento > 0 . ■

Definição 16.2. Se $I = [a_1, b_1] \times]a_2, b_2[\times \dots \times]a_n, b_n[$ é um intervalo limitado em $\mathbb{R}^n$, o seu volume- n é definido por:

$$V(I) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \cdots (b_n - a_n) > 0$$

Se $I \in \mathbb{R}^n$ é um intervalo compacto, uma partição finita de I é uma decomposição de I num número finito de subintervalos mais pequenos. ■

Exemplo 16.2.1. $I = [1, 3] \times [2, 4] \subset \mathbb{R}^2$



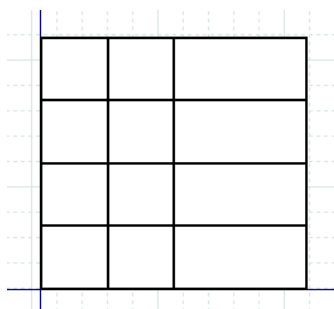
17 Aula de 20 de março de 2014

$I \subset \mathbb{R}^n$ intervalo compacto.

$$I = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$$

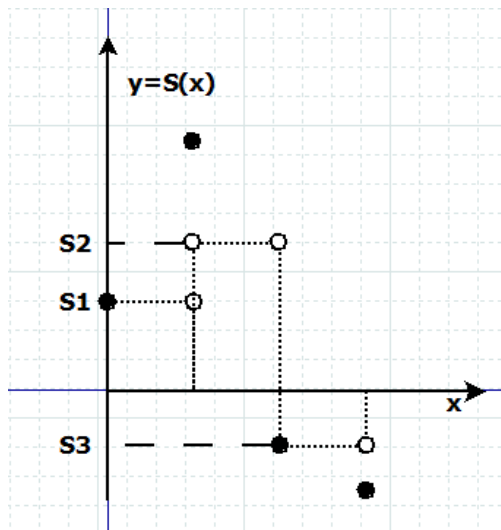
Volume-n: $V(I) = (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n) > 0$

Partição finita:



Definição 17.1. $I \subset \mathbb{R}^n$ intervalo compacto. Uma função $S : I \rightarrow \mathbb{R}$ diz-se em escada se $\exists$ partição finita de I tal que S é constante no interior dos subintervalos dessa partição. ■

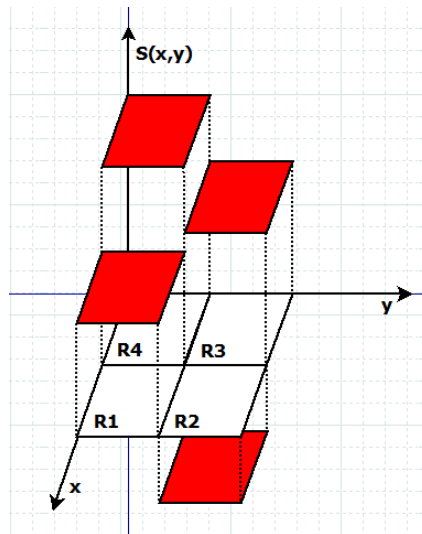
Exemplo 17.1.1. $n = 1$:



$$I = [a, b] = R_1 \cup R_2 \cup R_3$$

$$\underbrace{\int_a^b S(x) dx}_{cm^2} = S_1 V(R_1) + S_2 V(R_2) + S_3 V(R_3) = \sum_{j=1}^3 \underbrace{S_j}_{cm} \underbrace{V(R_j)}_{cm}$$

Exemplo 17.1.2. $n = 2$:



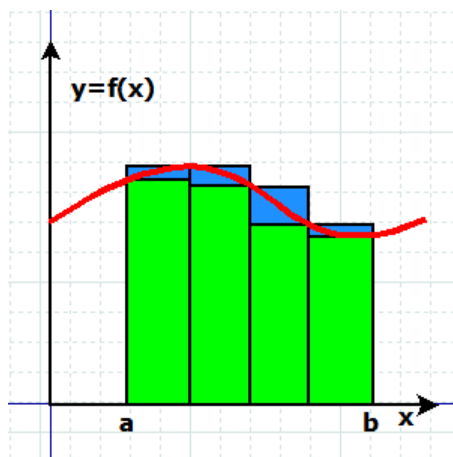
$$I = R_1 \cup R_2 \cup R_3 \cup R_4$$

$$\underbrace{\int_I S(x,y) dx dy}_{cm^3} = \int_I S = S_1 V(R_1) + S_2 V(R_2) + S_3 V(R_3) + S_4 V(R_4) = \sum_{j=1}^4 \underbrace{S_j}_{cm} \underbrace{V(R_j)}_{cm^2}$$

■

Definição 17.2. Seja $I \subset \mathbb{R}^n$ intervalo compacto, $S : I \rightarrow \mathbb{R}$ função em escada tal que S vale $S_j \in \mathbb{R}$ no interior do subintervalo R_j , $j = 1, \dots, N$, de uma partição finita de $I = R_1 \cup R_2 \cup \dots \cup R_N$ define-se o integral de S em I por:

$$\underbrace{\int_I S}_{cm^{n+1}} = \sum_{j=1}^N \underbrace{S_j}_{cm} \underbrace{V(R_j)}_{cm^n} : \text{volume-(n+1) da base de um paralelepípedo (n+1).}$$



■

Definição 17.3. $I \subset \mathbb{R}^n$ intervalo compacto $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ função limitada. Sejam:

$$\int_I f = \sup \left(\int_I S \right) \quad S \text{ é uma função em escada e } S \leq f$$

$$\overline{\int_I f} = \inf \left(\int_I S \right) \quad S \text{ é uma função em escada e } S \geq f$$

■

Definição de integral segundo Rieman

f diz-se integrável em I se $\int_I f = \overline{\int_I f}$, e define-se, nesse caso:

$$\int_I f = \int_I f = \overline{\int_I f}$$

Notações:

- $\int_I f$;
- $\int_I f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n$;
- $\underbrace{\int \cdots \int}_n f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n$

Como se calcula $\int_I f$ de forma eficiente?

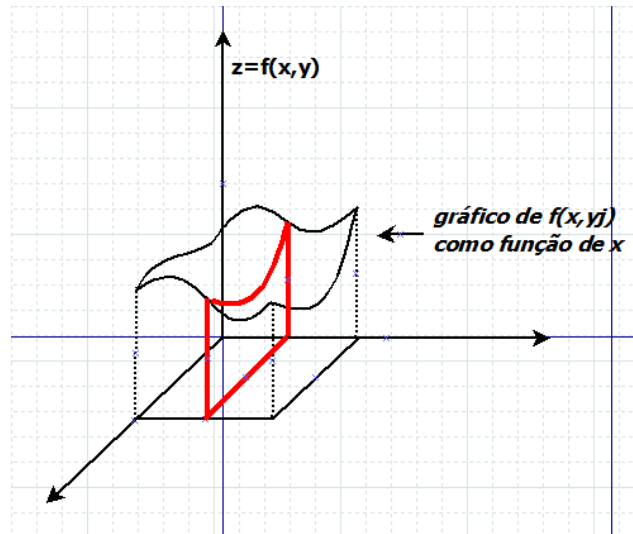
Resposta: Com o teorema de Fubini.

O teorema de Fubini afirma que podemos calcular um integral múltiplo de n variáveis integrando uma variável de cada vez.

$$\begin{aligned} & \int_{[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n = \\ &= \int_{a_1}^{b_1} \cdots \left[\int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \left[\int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \dots, x_n) dx_n \right] dx_{n-1} \right] \cdots dx_1 \end{aligned}$$

Fixamos $x_1, \dots, x_{n-1}$, e primitivamos relativamente a x_n , substituímos em b_n e a_n ; x_n desaparece da expressão e repetimos o processo.

Explicação gráfica do Teorema de Fubini



$$I = I_1 \times I_2$$

Consideremos que o corte desenhado no gráfico é feito na direção do eixo dos xx com $y = y_j$. Consideremos ainda uma secção paralela tal que a espessura da “fatia” compreendida entre y_j e y_{j-1} seja mínima.

$$\Delta y = y_j - y_{j-1}$$

A área do corte é: $\overbrace{\int_I f(x, y_j) dx}^{g(y_j)}$

$$\int_I f = \sum_j \text{volumes da fatia} \quad (1)$$

$$\approx \sum_j \Delta y_j \times \left[\underbrace{\int_{I_1} f(x, y_j) dx}_{g(y_j)} \right] \quad (2)$$

No limite (quando o número de fatias $\rightarrow +\infty$ e a espessura das fatias $\rightarrow 0$) obtem-se, equivalentemente às expressões 1 e 2:

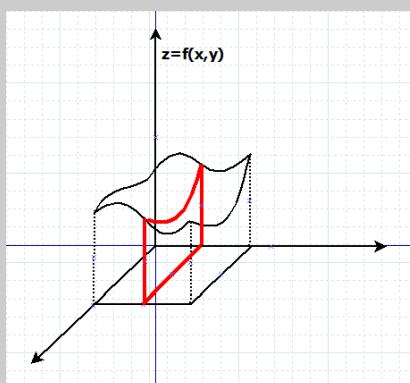
$$\int_{I_2} \left[\int_{I_1} f(x, y) dx \right] dy$$

$\int_{I_1} \left[\int_{I_2} f(x, y) dy \right] dx$ também é equivalente.

18 Aula de 21 de março de 2014

Teorema 18.1 (Fubini). $I = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$

$$\int_I f = \int_{a_1}^{b_1} \left[\cdots \left[\int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \left[\int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \dots, x_n) dx_n \right] dx_{n-1} \right] \cdots \right] dx_1$$



Formalizando:

$A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^m$ intervalos compactos. $f : A \times B \rightarrow \mathbb{R}$, integrável. Sejam: $B \rightarrow \mathbb{R}$, com $f_x(y) = f(x, y)$ com x fixo. $f_y : A \rightarrow \mathbb{R}$, com $f_y(x) = f(x, y)$ com y fixo então:

$$\begin{aligned} \int_{A \times B} f &= \int_A \left[\int_{\underline{B}} f x dy \right] dx = \int_A \left[\int_{\overline{B}} f x dy \right] dx = \\ &= \int_B \left[\int_{\underline{A}} f y dx \right] dy = \int_B \left[\int_{\overline{A}} f y dx \right] dy \end{aligned}$$

■

Nota 18.1. Nos exemplos que se seguem vamos assumir que o $\int_I f$ existe. Isto será justificado mais tarde. ■

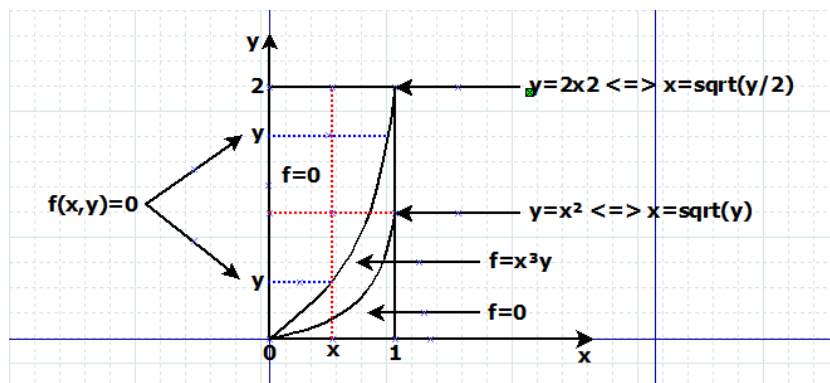
Exemplo 18.1. $I = [0, 1] \times [0, 2]$, $f(x, y) = x(x^2 + y^2)$

$$\begin{aligned}
\int_I f &= \int_0^1 \left[\int_0^2 x(x^2 + y^2) dy \right] dx = \\
&= \int_0^1 \left[x^3 y + \frac{xy^3}{3} \right]_{y=0}^{y=2} dx = \\
&= \int_0^1 \left[2x^3 + \frac{8}{3}x - 0 - 0 \right] dx = \\
&= \int_0^1 \left[2x^3 + \frac{8}{3}x \right] dx = \\
&= \left[\frac{x^4}{2} + \frac{8}{6}x^2 \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{2} + \frac{8}{3} = \frac{11}{6} = \\
&= \int_0^2 \left[\int_0^1 x(x^2 + y^2) dx \right] dy = \int_0^2 \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^2 y^2}{2} \right]_{x=0}^{x=1} dy = \\
&= \int_0^2 \left[\frac{1}{4} + \frac{y^2}{2} \right] dy = \\
&= \left[\frac{y}{4} + \frac{y^3}{6} \right]_{y=0}^{y=2} = \frac{1}{2} + \frac{8}{6} = \frac{11}{6}
\end{aligned}$$

■

Exemplo 18.2. $I = [0, 1] \times [0, 2]$

$$f(x, y) = \begin{cases} x^3 y, & x^2 < y < 2x^2 \\ 0, & \text{caso contrario} \end{cases}$$

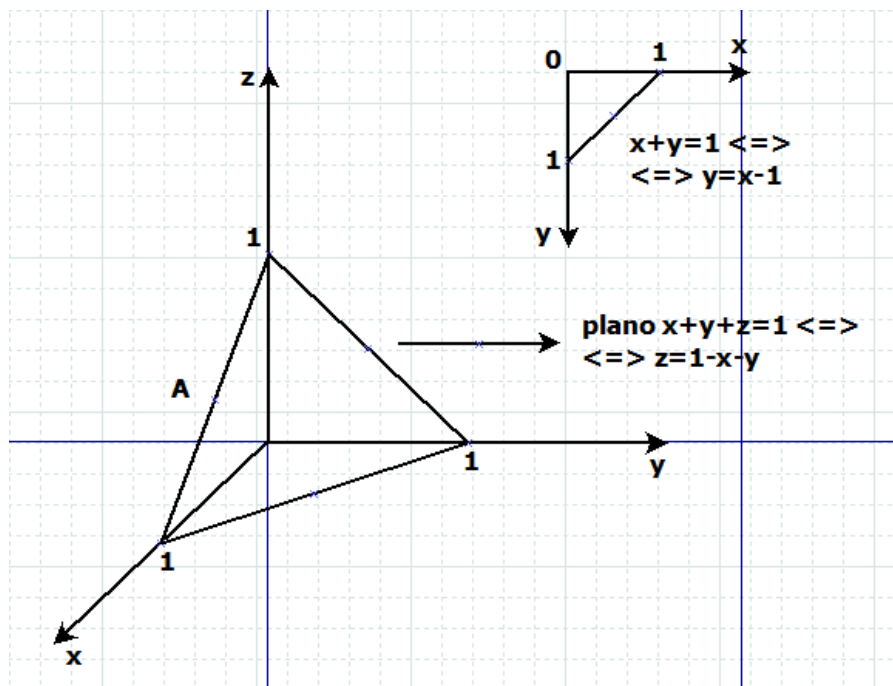


$$\begin{aligned}
\int_I f(x, y) dx dy &= \int_0^1 \left[\int_0^2 f(x, y) dy \right] dx = \\
&= \int_0^1 \left[\int_{x^2}^{2x^2} x^3 y dy \right] dx = \\
&= \int_0^1 \left[\frac{x^3 + y^2}{2} \right]_{x^2}^{2x^2} dx = \\
&= \int_0^1 \left[\frac{x^3(2x^2)^2}{2} - \frac{x^3(x^2)^2}{2} \right] dx = \\
&= \int_0^1 \left[\frac{4x^7}{2} - \frac{1}{2}x^7 \right] dx = \\
&= \int_0^1 \frac{3}{2}x^7 dx = \frac{3}{16} = \\
&= \int_0^2 \left[\int_0^1 f(x, y) dx \right] dy = \int_0^1 \left[\int_{\sqrt{\frac{y}{2}}}^{\sqrt{y}} x^3 y dx \right] dy + \int_1^2 \left[\int_{\sqrt{\frac{y}{2}}}^1 x^3 y dx \right] dy = \\
&= \int_0^1 \left[\frac{x^4}{4} y \right]_{x=\sqrt{\frac{y}{2}}}^{x=\sqrt{y}} dy + \int_1^2 \left[\frac{x^4}{4} y \right]_{x=\sqrt{\frac{y}{2}}}^{x=1} dy = \\
&= \int_0^1 \left[\frac{y^3}{4} - \frac{y^3}{16} \right] dy + \int_1^2 \left[\frac{y}{4} - \frac{y^3}{16} \right] dy = \dots = \frac{3}{16}
\end{aligned}$$

■

Exemplo 18.3. $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}$. Calcular o volume de A .

Facto: Volume de $A = \int_A 1$



$$\begin{aligned}
 \int_A 1 &= \int \left[\int \left[\int 1 dz \right] dy \right] dx = \\
 &= \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} \left[\int_0^{1-x-y} 1 dz \right] dy \right] dx = \\
 &= \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} (1-x-y) dy \right] dx = \\
 &= \int_0^1 \left[y - xy - \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=1-x} dx = \\
 &= \int_0^1 \left[1 - 2x + x^2 - \frac{(1-x)^2}{2} \right] dx = \\
 &= \int_0^1 \left[\frac{1}{2} - x + \frac{1}{2}x^2 \right] dx = \\
 &= \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 \right]_{x=0}^{x=1} = \\
 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{1}{6}
 \end{aligned}$$

■

19 Aula de 24 de março de 2014

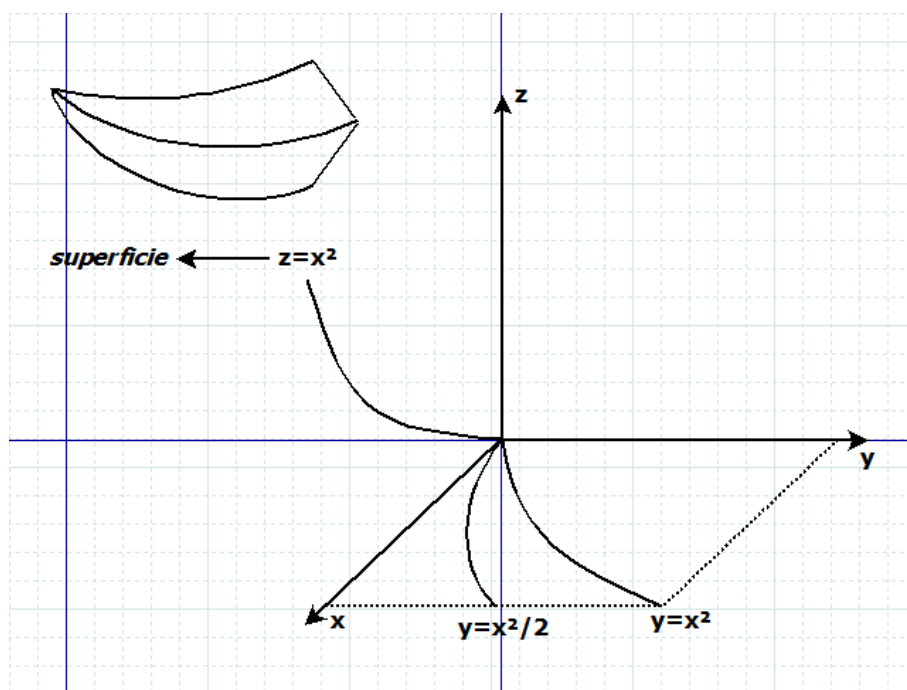
Exemplo 19.1. $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, \frac{x^2}{2} \leq y \leq x^2, 0 \leq z \leq x^2\}$.

Calcular o volume de S , $\text{volume}(S) = \int_S 1$.

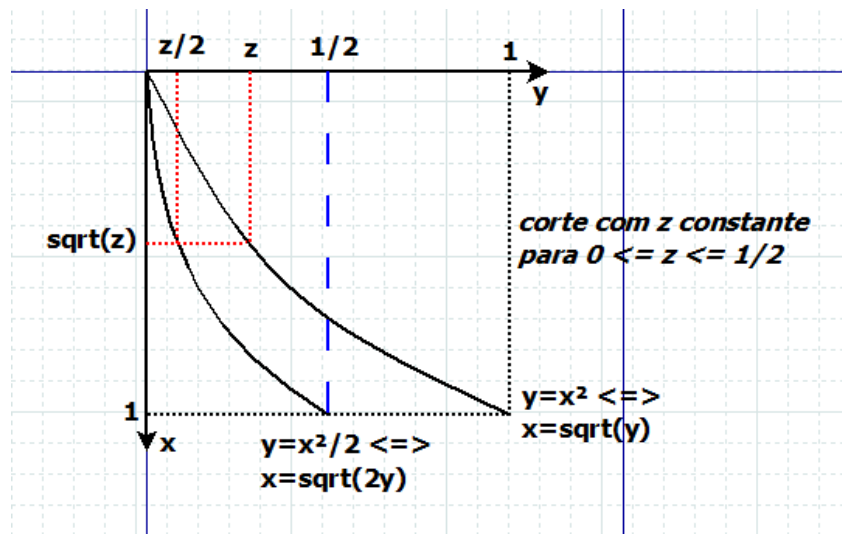
$$\int_S 1 = \int_0^1 \left[\int_{\frac{x^2}{2}}^{x^2} \left[\int_0^{x^2} 1 dz \right] dy \right] dx = \dots$$

Outra ordem:

$$\int_S 1 = \int \left[\int \left[\int 1 dx \right] dy \right] dz$$

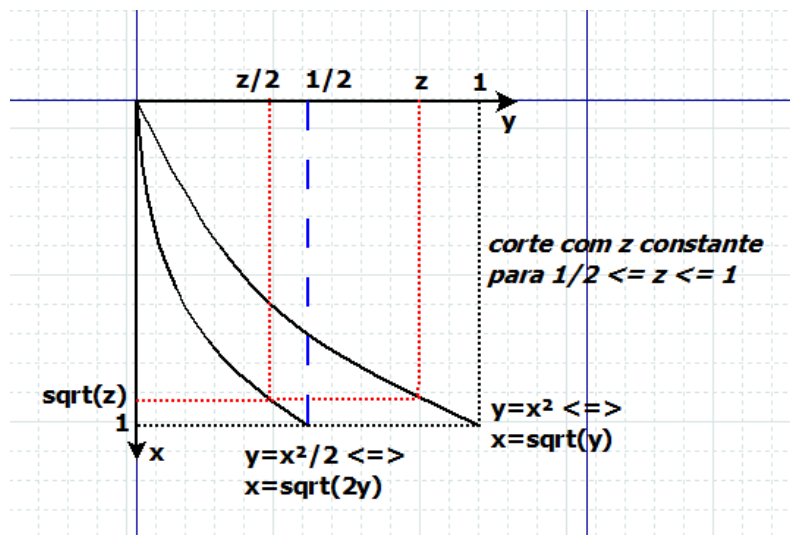


$$\begin{cases} z = \text{constante} \\ z = x^2 \longrightarrow x = \sqrt{z} = \sqrt{\text{constante}} \end{cases}$$



$$\int_S 1 = \int_0^{\frac{1}{2}} \left[\int_{\frac{z}{2}}^z \left[\int_{\sqrt{z}}^{\sqrt{2y}} 1 dx \right] dy + \int_z^{\frac{1}{2}} \left[\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2y}} 1 dx \right] dy + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left[\int_{\sqrt{y}}^1 1 dx \right] dy \right] dz +$$

$$+ \int_{\frac{1}{2}}^1 \left[\int_{\frac{z}{2}}^{\frac{1}{2}} \left[\int_{\sqrt{z}}^{\sqrt{2y}} 1 dx \right] dy + \int_{\frac{1}{2}}^z \left[\int_{\sqrt{z}}^1 1 dx \right] dy + \int_z^1 \left[\int_{\sqrt{y}}^1 1 dx \right] dy \right] dz$$

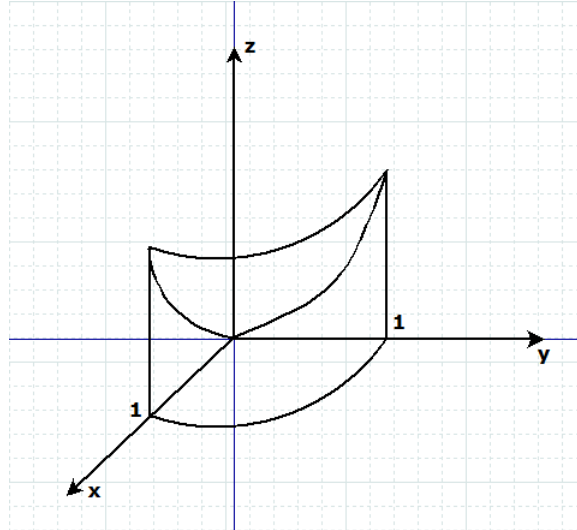


$$\int_S 1 = \int_0^1 \int_{\frac{x^2}{2}}^{x^2} 1 dy dx dz$$

■

Exemplo 19.2. $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq x^2 + y^2 \leq 1, x, y \geq 0\}$

$$\int_A 1 = ? \quad l = \sqrt{x^2 + y^2}$$



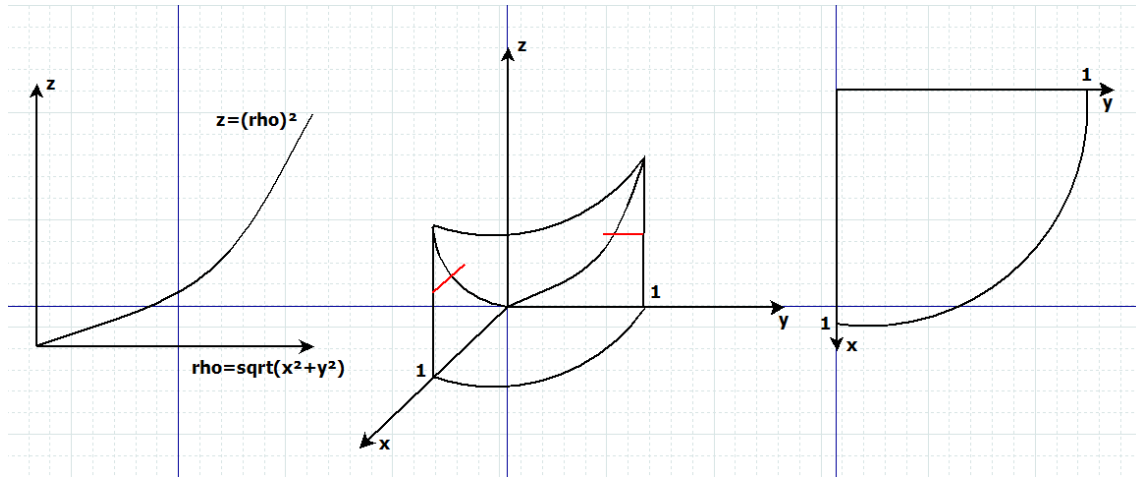
$$x^2 + y^2 = 1 \longleftrightarrow l = 1; y = \sqrt{1 - x^2}$$

$$\int_A 1 = \int_0^1 \left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \left[\int_0^{x^2+y^2} 1 dz \right] dy \right] dx = \int \left[\int \left[\int dx \right] dy \right] dz$$

■

20 Aula de 26 de março de 2014

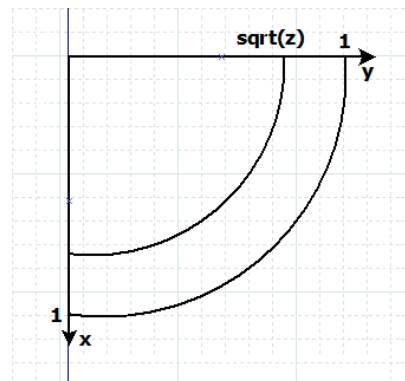
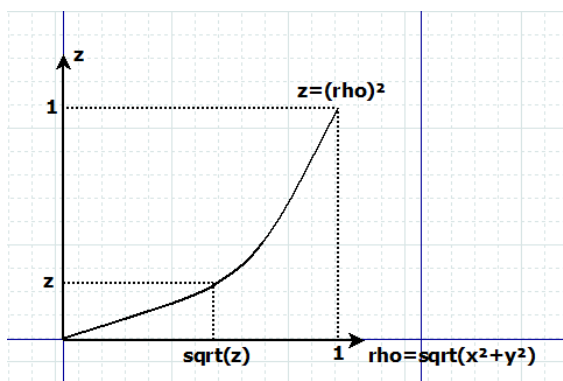
$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq x^2 + y^2 \leq 1, x, y \geq 0\}$$



$$x + y^2 = 1 \Leftrightarrow y = \sqrt{1 - x^2}$$

$$Vol(A) = \int_A 1 = \int_0^1 \left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \left[\int_0^{x^2+y^2} 1 dz \right] dy \right] dx$$

$$\int_A 1 = \int \left(\int \left(\int dx \right) dy \right) dz = ?$$



Na imagem anterior que ilustra $\frac{1}{4}$ de uma coroa circular tem-se que o quarto de circunferência interior respeita a equação $x^2 + y^2 = z \Leftrightarrow x = \sqrt{z - y^2}$ enquanto o quarto de circunferência exterior respeita a equação $x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow x = \sqrt{1 - y^2}$

$$\int_A 1 = \int_0^1 \left[\int_0^{\sqrt{z}} \left[\int_{\sqrt{z-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} 1 dx \right] dy + \int_{\sqrt{z}}^1 \left[\int_0^{\sqrt{1-y^2}} 1 dx \right] dy \right] dz$$

Voltemos à questão: quando é que $\int_I f$ existe?

Definição 20.1. Um conjunto diz-se numerável se os seus elementos se podem contar: 1º elemento, 2º elemento, 3º elemento, $\dots$. Ou seja, se existisse uma ligação do conjunto com $\mathbb{N}$ ou com um subconjunto finito de $\mathbb{N}$. ■

Exemplo 20.1.1. $\mathbb{N}$ é numerável:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots \\ | & | & | & | & | & \\ 1^\circ & 2^\circ & 3^\circ & 4^\circ & 5^\circ & \dots \end{array}$$

■

Exemplo 20.1.2. $\mathbb{Z}$ é numerável:

$$\begin{array}{cccccccccc} \dots & -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \dots \\ & | & | & | & | & | & | & | & | & | & \\ \dots & 9^\circ & 7^\circ & 5^\circ & 3^\circ & 1^\circ & 2^\circ & 4^\circ & 6^\circ & 8^\circ & \dots \end{array}$$

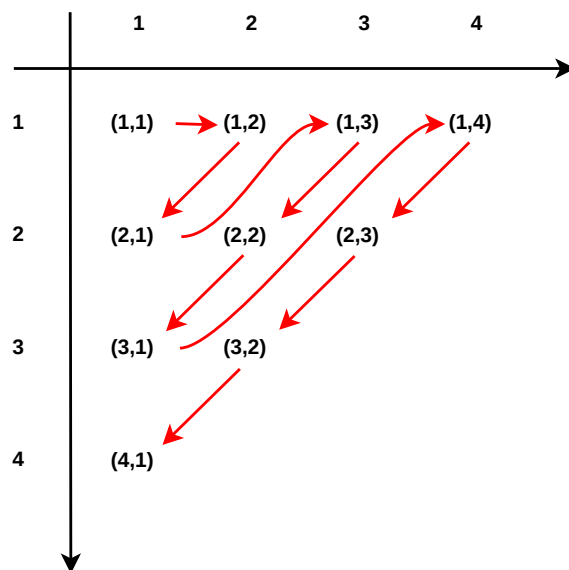
■

Exemplo 20.1.3. Inteiros pares:

$$\begin{array}{cccccc} 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & \dots \\ | & | & | & | & | & | & \\ 1^\circ & 2^\circ & 3^\circ & 4^\circ & 5^\circ & 6^\circ & \dots \end{array}$$

■

Exemplo 20.1.4. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é numerável:



■

Exemplo 20.1.5. $\mathbb{Q}^+$ é numerável:

$$q \in \mathbb{Q}^+ \longrightarrow q = \frac{m}{n}, (n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{Q}^+ \text{ é numerável!}$$

■

Exemplo 20.1.6. $\mathbb{R}$ não é numerável ($\Rightarrow \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ não é numerável).

Resumo da demonstração. Suponhamos que conseguimos contar os elementos de $[0, 1]$:

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \dots$$

Expansão decimal:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, a_{11}a_{12}a_{13} \dots \\ x_2 &= 0, a_{21}a_{22}a_{23} \dots \\ x_3 &= 0, a_{31}a_{32}a_{33} \dots \\ &\vdots \end{aligned}$$

Podemos contruir $y \in [0, 1]$ que não foi contado!

$y = 0, b_1b_2b_3 \dots$ com:

$$b_1 \neq a_{11} \Rightarrow y \neq x_1; b_2 \neq a_{22} \Rightarrow y \neq x_2, \dots b_k \neq a_{kk} \Rightarrow y \neq x_k$$

■

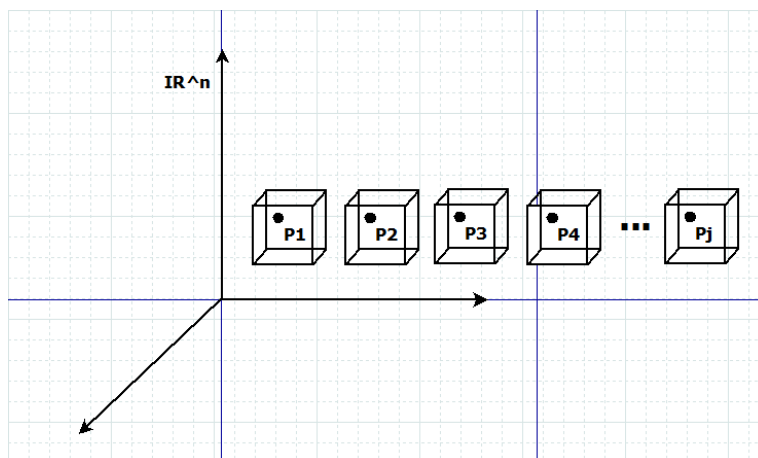
■

Definição 20.2. $S \subset \mathbb{R}^n$ tem medida nula se $\forall \delta > 0, \exists$ coleção numerável de intervalos limitados $I_1, I_2, I_3, \dots$ tal que:

$$S \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j, \quad e \quad \sum_{j=1}^{\infty} Vol(I_j) < \delta$$

■

Exemplo 20.2.1. Um conjunto numerável de pontos em $\mathbb{R}^n$ tem medida nula:



■

$$V(I_1) < \frac{\delta}{2} V(I_2) < \frac{\delta}{4} V(I_j) < \frac{\delta}{2^j}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} V(I_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\delta}{2^j} < \delta$$

$\Downarrow$

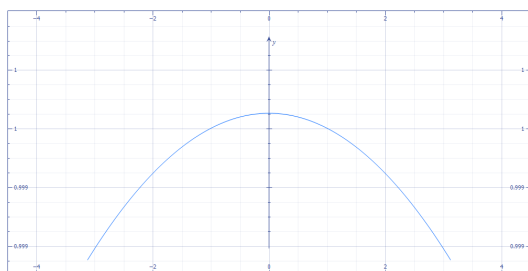
$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ tem medida nula!

21 Aula de 27 de março de 2014

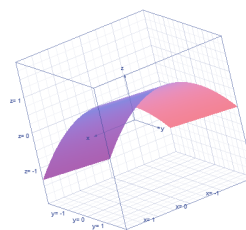
Exemplo 21.1. $\mathbb{Q} \in \mathbb{R}$ tem medida nula. ■

Exemplo 21.2. $S \subset \mathbb{R}^n$ compacto. $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, então, o gráfico de f em $\mathbb{R}^{n+1}$ tem medida nula (ideia: continuidade uniforme).

$n = 1$:

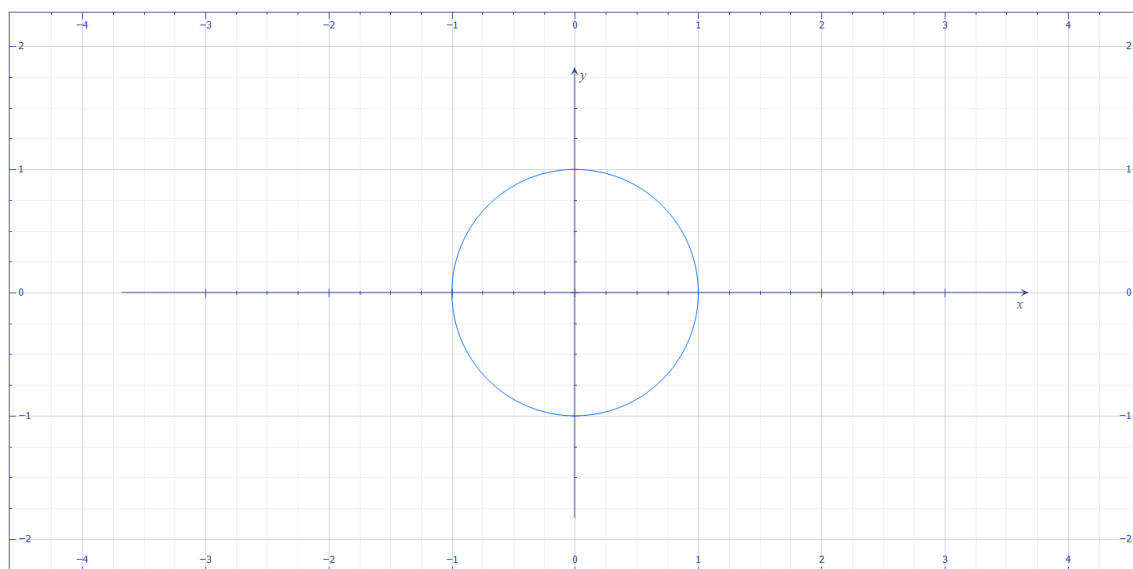


$n = 2$:



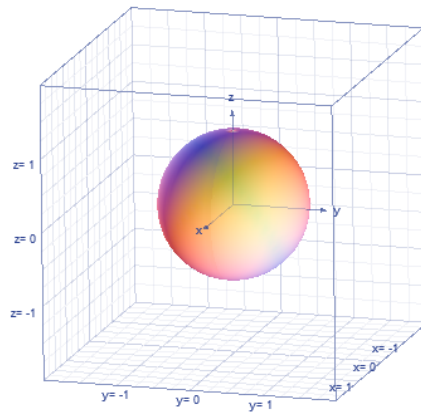
É possível arranjar pequenos quadrados ($n = 1$) ou paralelepípedos ($n = 2$) tal que seja possível, através da sua união cobrir toda a linha ou área do gráfico em $n = 1$ ou $n = 2$, respetivamente e que a união das suas áreas seja $< \delta$ escolhido. ■

Exemplo 21.3. $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2$ tem medida nula:



Os gráficos de $y = \sqrt{1 - x^2}$ e $y = -\sqrt{1 - x^2}$ tal que $x \in [0, 1]$ têm medida nula. ■

Exemplo 21.4. $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$ tem medida nula:



Os gráficos de $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ e $z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ com $x^2 + y^2 = 1$ têm medida nula. ■

Teorema 21.1 (Critério de integrabilidade). $I \subset \mathbb{R}^n$ intervalo compacto. $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ função limitada.

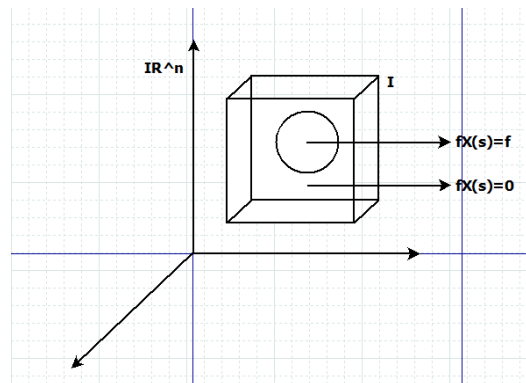
f é integrável em I , ou seja $\int_I f$ existe, sse o conjunto das descontinuidades de f tem medida nula. ■

Definição 21.1. $S \subset \mathbb{R}^n$. A função característica de S é:

$$X_S(x) = \begin{cases} 1 & , x \in S \\ 0 & , x \notin S \end{cases}$$

■

$S \subset \mathbb{R}^n$ limitado, $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ limitada:



$S \subset I$, I intervalo compacto.

Definição 21.2. Dizemos que f é integrável em S se fX_S é integrável em I . E, nesse caso, pomos:

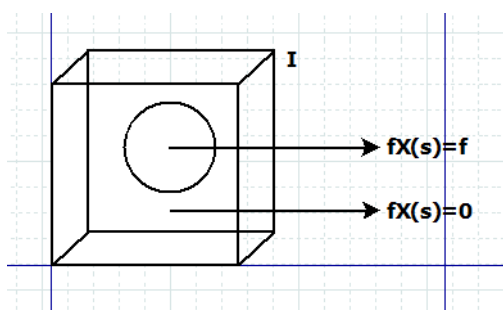
$$\int_S f = \int_I fX_S$$

■

Definição 21.3. $S \subset \mathbb{R}^n$ limitado diz-se mensurável à Jordan se a sua fronteira tem medida nula. ■

$S \subset \mathbb{R}^n$ mensurável à Jordan.

$f : S \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e limitada.



fX_S só pode ser descontínua na fronteira de S .

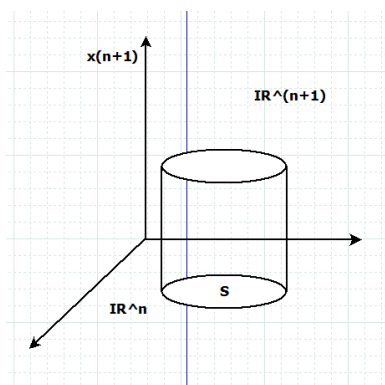
Como a fronteira de S tem medida nula, concluímos que $\int_S f$ existe!

Exemplo 21.5. Todos os integrais calculados nestes apontamentos até aqui. ■

Aplicações

$S \subset \mathbb{R}^n$ conjunto mensurável à Jordan:

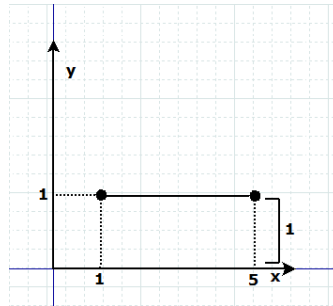
O volume- n de S é definido por $V(S) = \int_S 1$



$$f(x_1, \dots, x_n) = 1$$

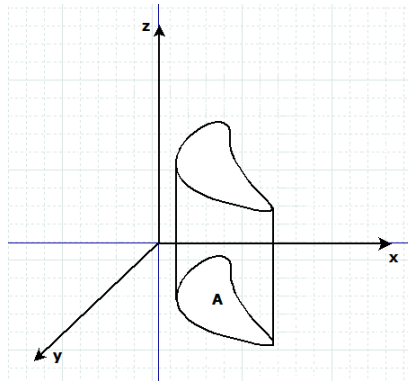
Volume- $(n+1)$ debaixo do gráfico = $1 \times \text{volume-}n$ da base $S = \text{volume-}n(S)$. Por exemplo:

$$\bullet \int_0^S 1 dx = 4 = 1 \times 4$$



$$\bullet f : A \longrightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = 1 \forall (x, y) \in A$$

$$\int_A 1 = 1 \times \text{area}(A) = \text{area}(A)$$

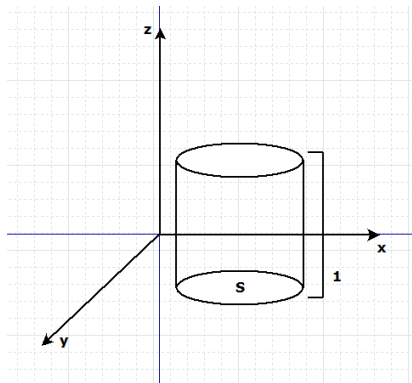


22 Aula de 28 de março de 2014

$S \subset \mathbb{R}^n$ mensurável à Jordan (por exemplo um conjunto limitado por gráficos).

$f : S \rightarrow \mathbb{R}$ limitada, contínua $\Rightarrow \int_S f$ existe.

1. $Vol(S) = \int_S 1$



2. Se S tem densidade de massa (carga) $\alpha : S \rightarrow \mathbb{R}$, a massa (carga) total é:

$$M(S) = \int_S \alpha$$

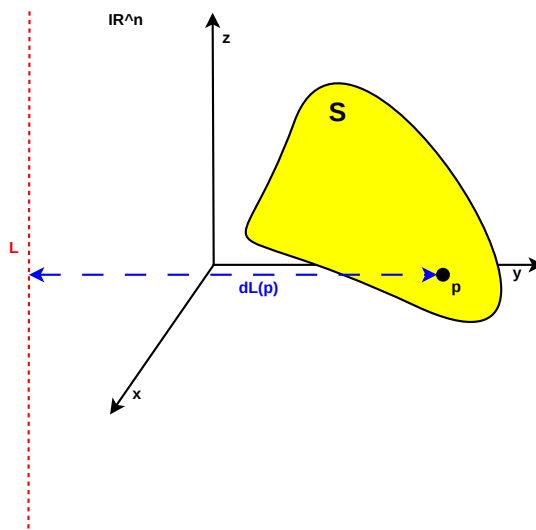
3. As coordenadas $\bar{x}^j, j = 1, \dots, n$, do centro de massa são:

$$\bar{x}^j = \frac{1}{M(S)} \int_S \alpha x^j$$

4. As coordenadas $\bar{x}^j, j = 1, \dots, n$, do centróide de S são:

$$\bar{x}^j = \frac{1}{V(S)} \int_S x^j$$

5. O momento de inércia de S relativamente ao eixo L :



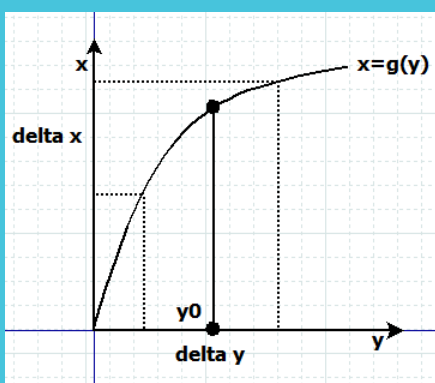
$$I_L(S) = \int_S \alpha d_L^2$$

Mudança de variáveis de integração

A Recordar 14. Em CDI-I:

$$\int_a^b f(x) dx \underbrace{=}_{x=g(y) \Leftrightarrow y=g^{-1}(x)} \int_{g^{-1}([a,b])} f(g(y)) |g'(y)| dy$$

O fator $|g'(y)|$ corrige as distorções de volume causadas pela transformação $x = g(y)$:



$$\Delta x \approx |g'(y_0)| \Delta y$$



Definição 22.1. $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Uma transformação de coordenadas em U , é uma função de classe C^1 , $g : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$, injetiva e com $|Dg(p)| \neq 0$, $\forall p \in U$. ■

Facto 22.1 (que explicaremos mais à frente com o teorema 25.1 da função inversa).
 Se $g : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é transformação de coordenadas então $g^{-1} : g(U) \longrightarrow U$ também é. ■

Queremos saber como é que g distorce localmente os volumes- n .

Como g é diferenciável em $p \in U$, localmente, perto de p , g é arbitrariamente bem aproximada pela transformação linear:

$$Dg(p) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

Como é que uma transformação linear $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ deforma os volumes- n ?

Resposta: multiplica-os por um fator de $|T|$. **Porquê?**

Seja $P \subset \mathbb{R}^n$ o paralelepípedo- n gerados pelos vetores linearmente independentes $v_1, \dots, v_n$. O volume- n de P é:

$$Vol(P) = \left| \det \begin{bmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{bmatrix} \right|$$

T transforma P no paralelepípedo- n $\tilde{P}$ formado por $Tv_1, Tv_2, \dots, Tv_n$.

$$\begin{aligned} Vol(\tilde{P}) &= \left| \det \begin{bmatrix} | & & | \\ Tv_1 & Tv_2 & \cdots & Tv_n \\ | & & | \end{bmatrix} \right| \\ &= \left| \det \left(T \begin{bmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{bmatrix} \right) \right| \\ &= |det(T)| \left| \det \begin{bmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{bmatrix} \right| \\ &= |det(T)| Vol(P) \end{aligned}$$

Logo a transformação de coordenadas g afeta os volumes- n localmente perto de $p \in U$, multiplicando-os por um fator de:

$$\underbrace{|det(Dg(p))|}_{\text{jacobiana de } g \text{ em } p}$$

Logo esperamos que seja válida a fórmula seguinte:

$$\int_{S \subset \mathbb{R}^n} f(x) dx \quad \underbrace{=}_{x=g(y) \Leftrightarrow y=g^{-1}(x)} \int_{g^{-1}(S)} f(g(y)) |det(Dg(y))| dy$$

A validade desta fórmula é estabelecida pelo teorema 22.1.

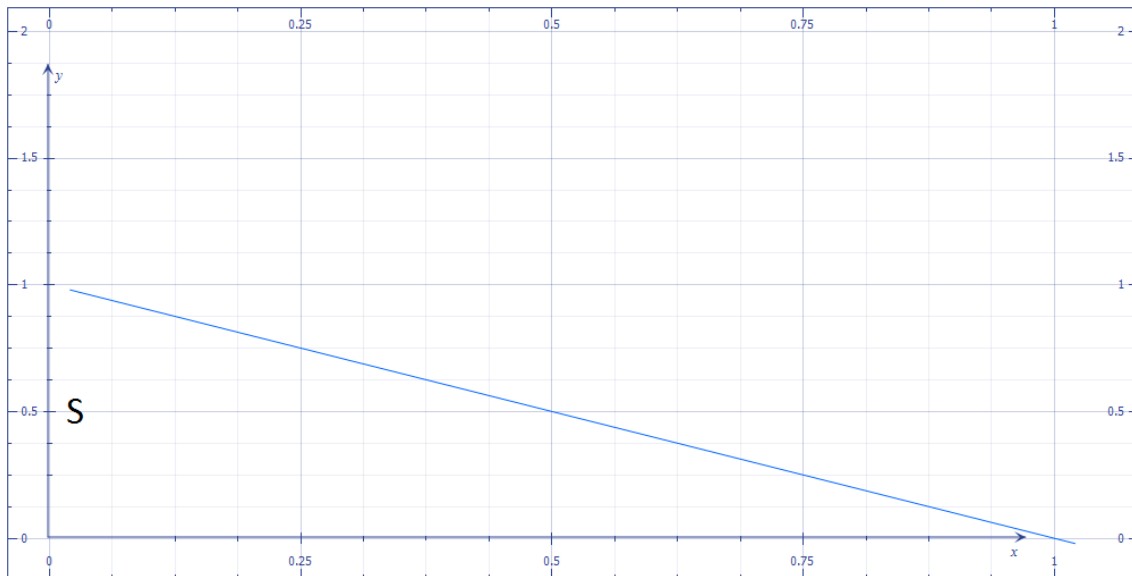
Teorema 22.1 (mudança de variáveis de integração). $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto, g uma transformação de coordenadas em U , $S \subset U$ mensurável à Jordan. Se $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável em S então $f \circ g |det(Dg)|$ é integrável em $g^{-1}(S)$ e:

$$\int_{S \subset \mathbb{R}^n} f(x) dx \quad \underbrace{=}_{x=g(y) \Leftrightarrow y=g^{-1}(x)} \int_{g^{-1}(S)} f(g(y)) |det(Dg(y))| dy$$

■

23 Aula de 31 de março de 2014

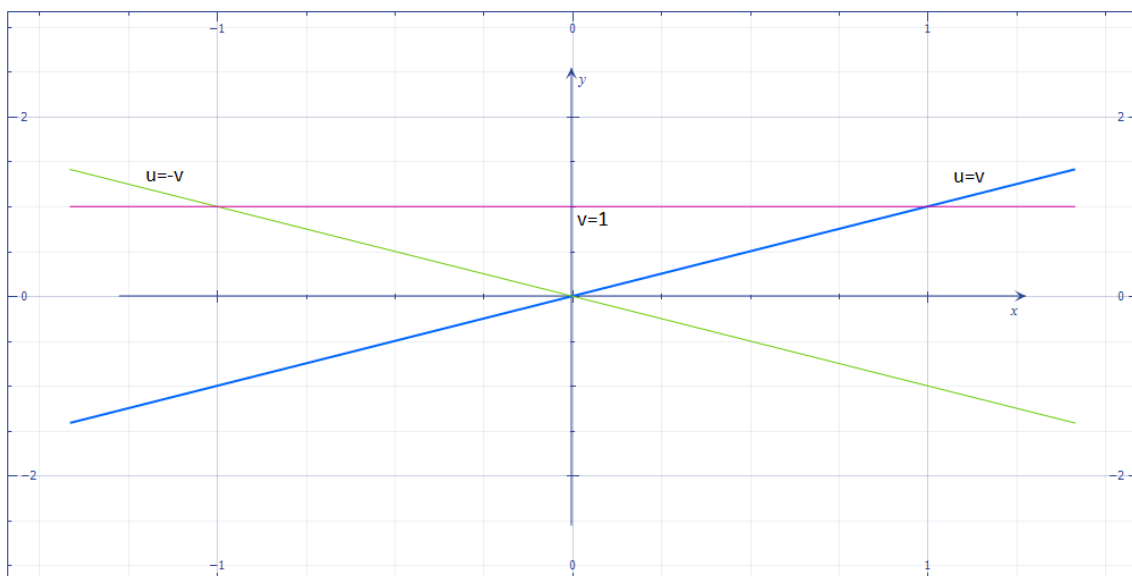
Exemplo 23.1. $\int_0^1 \left[\int_0^{1-x} \exp \left[\frac{x-y}{x+y} \right] dy \right] dx = ?$



$$x + y = 1 \Leftrightarrow y = 1 - x \quad \begin{cases} u = x - y \\ v = x + y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{u+v}{2} \\ y = \frac{v-u}{2} \end{cases}, \quad (x, y) = g(u, v), \quad Dg(u, v) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad |\det Dg| = \frac{1}{2} \neq 0$$

$$S : \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 1 \end{cases} \rightsquigarrow g^{-1}(S) : \begin{cases} u + v \geq 0; u \geq -v \\ v - u \geq 0; v \geq u \\ v \leq 1 \end{cases}$$

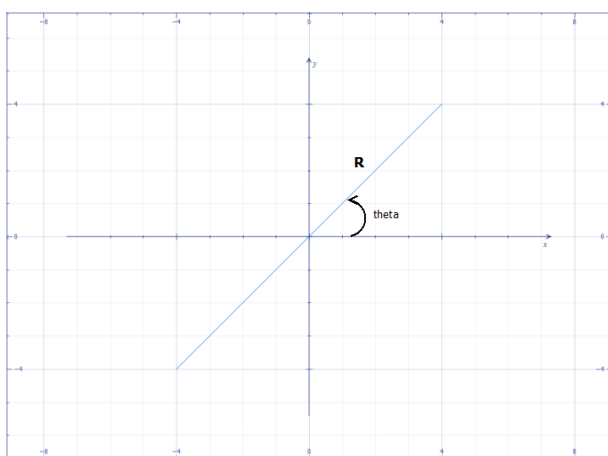


A figura anterior ilustra $g^{-1}(S)$.

$$\begin{aligned}
 \int_S \cdots &= \int_{g^{-1}(S)} \exp\left[\frac{u}{v}\right] \times \frac{1}{2} du dv = \int \left[\int \exp\left[\frac{u}{v}\right] \times \frac{1}{2} du \right] dv = \\
 &= \int_0^1 \left[\frac{v}{2} \exp\left[\frac{u}{v}\right] \right]_{u=-v}^{u=+v} dv = \\
 &= \frac{(e - e^{-1})}{2} \int_0^1 v dv = \\
 &= \frac{(e - e^{-1})}{4}
 \end{aligned}$$

■

Exemplo 23.2. Coordenadas polares em $\mathbb{R}^2$



$$\begin{cases} x = R \cos \theta \\ y = R \sin \theta \end{cases}, (x, y) = g(R, \theta)$$

$$R > 0, \theta \in]0, 2\pi[$$

θ tem uma descontinuidade de 2π quando cruzamos o semi-eixo

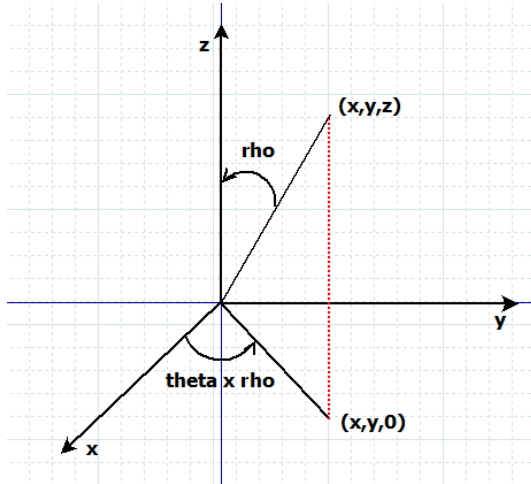
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$Dg(R, \theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & R \cos \theta \end{bmatrix}, |\det Dg| = R$$

$$\int \int_{S \subset \mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy = \int \int_{g^{-1}(S) \subset \mathbb{R}^2} f(R \cos \theta, R \sin \theta) \cdot R dR d\theta$$

■

Exemplo 23.3. Coordenadas cilíndricas em $\mathbb{R}^3$



$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

$$\rho > 0, \theta \in]0, 2\pi[, z \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right), x, y > 0 \\ z = z \end{cases}$$

$$g(\rho, \theta, z) = (x, y, z); |\det Dg| = \rho$$

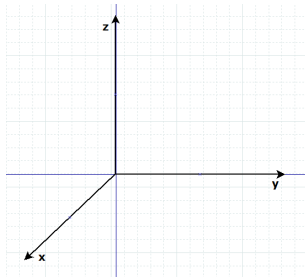
$$\int \int \int_{S \subset \mathbb{R}^3} f(x, y, z) dx dy dz = \int \int \int_{g^{-1}(S) \subset \mathbb{R}^3} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z) \rho d\rho d\theta dz$$

■

Exemplo 23.4. Coordenadas esféricas em $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} x = R \cos \theta \sin \phi \\ y = R \sin \theta \sin \phi \\ z = R \cos \phi \end{cases}$$

$$R > 0, \theta \in]0, 2\pi[, \phi \in]0, \pi[$$

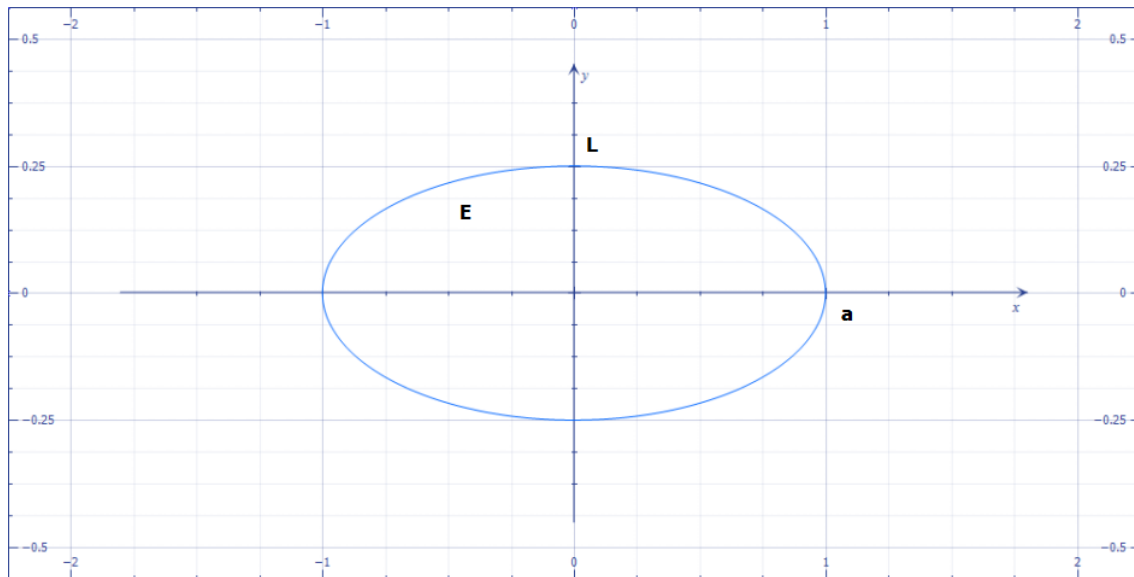


$$\begin{cases} R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \arctan \frac{y}{x} \\ \phi = \arctan \left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \right), x, y, z > 0 \end{cases}$$

$$\dots \iiint \dots \iiint R^2 \sin \phi$$

■

Exemplo 23.5. Área da elipse E : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1, a, b > 0$



$$Area(E) = \int_E 1, \quad \begin{cases} x = aR \cos \theta \\ y = bR \sin \theta \end{cases}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \Leftrightarrow R^2 \leq 1 \Leftrightarrow R \leq 1$$

Jacobiano: abR

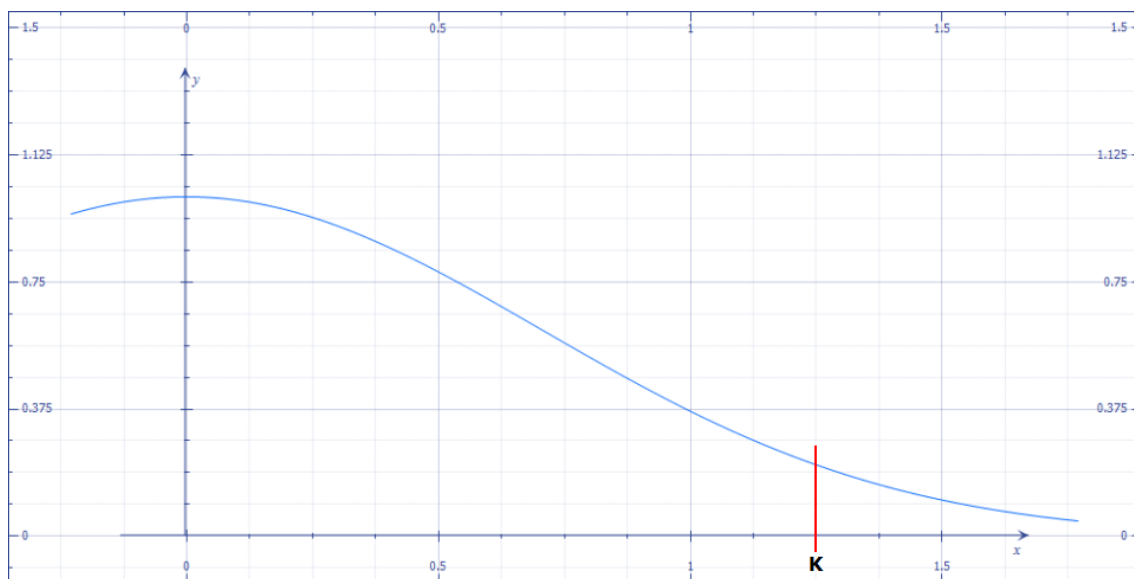
$$\int_E 1 = \int_0^1 \left[\int_0^{2\pi} 1abR d\theta \right] dR = 2\pi ab \int_0^1 R dR = \pi ab$$

■

24 Aula de 2 de abril de 2014

Exemplo 24.1. Integral Gaussiano

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_0^k e^{-x^2} dx$$



$$I = \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy$$

$$\begin{aligned}
I^2 &= \left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \right) \left(\int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy \right) = \\
&= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2-y^2} dy \right) dx = \\
&= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R^2} R d\theta \right) dR = \\
&= \frac{\pi}{2} \int_0^{+\infty} e^{-R^2} R dR = \\
&= \frac{\pi}{2} \lim_{k \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{2} e^{-R^2} \right]_{R=0}^{R=k} = \\
&= \underbrace{\frac{\pi}{2} \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2} e^{-k^2} \right)}_{=0} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

$$I^2 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

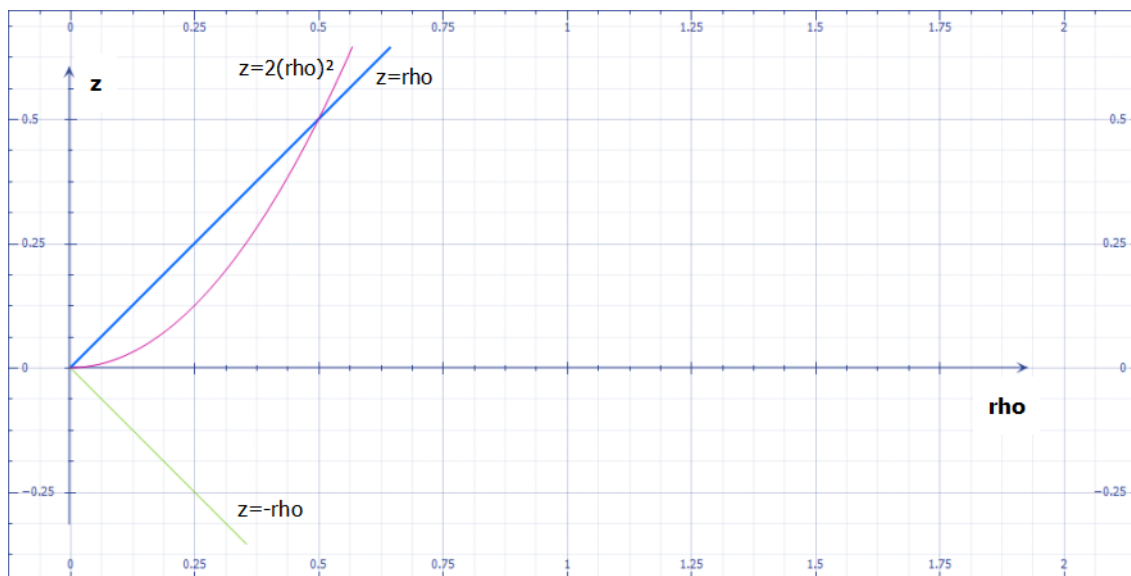
■

Exemplo 24.2. Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ o volume limitado por $z^2 = x^2 + 4y^2$, $z = 2x^2 + 8y^2$.

Volume(S) = ?

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \frac{1}{2} \rho \cos \theta \\ z = z \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} z^2 = \rho^2 \\ z = 2\rho^2 \end{cases}$$

Jacobiano: $\frac{1}{2}\rho$



$$Volume(S) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{1}{2}} \int_{2\rho^2}^{\rho} 1 \frac{\rho}{2} dz d\rho d\theta = \dots = \frac{\pi}{96}$$

Se S tem densidade de massa $\alpha(x, y, z) = z$

$$I_x(S) = \int_S \alpha d_x^2 = \int_S z(y^2 + z^2) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{1}{2}} \int_{2\rho^2}^{\rho} \underbrace{z}_{\alpha} \underbrace{\left(\frac{1}{4}\rho^2 \sin^2 \theta + z^2\right)}_{d_x^2} \underbrace{\left(\frac{\rho}{2}\right)}_{jacobiano} dz d\rho d\theta$$

■

Regra de Leibniz

Por vezes, é muito útil estudar funções definidas por integrais.

$$x \in A \subset \mathbb{R}^m, A \text{ compacto}$$

$$y \in B \subset \mathbb{R}^p$$

$$f : A \times B \longrightarrow \mathbb{R}, f(x, y)$$

$$F(y) = \int_A f(x, y) dx$$

F é contínua?

Se f é de classe C^1 então F também é?

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial F}{\partial y_i}(y) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(y + te_i) - F(y)}{t} = \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left[\int_A (x, y + te_i) dx - \int_A f(x, y) dx \right] = \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \int_A \frac{f(x, y + te_i) - f(x, y)}{t} dx = \\
 &\underbrace{=}_{\text{Se } f \text{ lim} = \lim f} \int_A \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x, y + te_i) - f(x, y)}{t} dx = \\
 &= \underbrace{\int_A \frac{\partial f}{\partial y_i}(x, y) dx}_{\text{Regra de Leibniz}}
 \end{aligned}$$

Teorema 24.1 (Regra de Leibniz). $A \subset \mathbb{R}^m$ compacto, $B \subset \mathbb{R}^p$ aberto. $f : A \times B \rightarrow \mathbb{R}$, classe C^1 .

A função $F : B \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $F(y) = \int_A f(x, y) dx$, existe, é de classe C^1 em B , e $\frac{\partial F}{\partial y_i}(y) = \int_A \frac{\partial f}{\partial y_i}(x, y) dx$. ■

Exemplo 24.1.1. Seja $F(t) = \int_0^1 x^2 \sin(tx) dx$ e $F'(t) = \int_0^1 x^3 \cos(tx) dx$. Por exemplo, $F'(0) = \frac{1}{4}$ ■

Exemplo 24.1.2. Vimos que $\int_0^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$, $a > 0$

$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = \int_0^{+\infty} -\frac{d}{da} (e^{-ax^2}) dx = -\frac{d}{da} \int_0^{+\infty} e^{-ax^2} dx = -\frac{d}{da} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \right) = \frac{\sqrt{\pi}}{4} a^{-\frac{3}{2}}$$

Facto: A regra de Leibniz é válida neste caso.

$$\int_0^{+\infty} x^{2k} e^{-ax^2} dx, k \in \mathbb{N} = \int_0^{+\infty} (-1)^k \frac{d^k}{da^k} (e^{-ax^2}) dx = (-1)^k \frac{dk}{da^k} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \right)$$
■

Exemplo 24.1.3. $F(t) = \int_0^{t^2} \cos(tx^2)dx$

$$F'(t) = \underbrace{2t(\cos(tx^2))\bigg|_{x=t^2}}_{2t\cos(t^5) \quad (CDI-I)} + \underbrace{\int_0^{t^2} (-x^2) \sin(tx^2)dx}_{CDI-II}$$

■

25 Aula de 3 de abril de 2014

Exemplo 25.1. $\psi(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} f(t, x) dx$

$$\psi'(t) = \underbrace{\int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) dx}_{\text{Regra de Leibniz}} \left. \begin{array}{l} +b'(t)f(t, b(t)) \\ -a'(t)f(t, a(t)) \end{array} \right\} CDI - I$$

Exercício: Mostrar que a igualdade anterior é verdadeira utilizando a regra da derivada da composta.

■

$$\phi(z, w, t) = \int_z^w f(t, x) dx$$

$$g(t) = (a(t), b(t), t)$$

$$\psi(t) = \phi \circ g(t) \Rightarrow D\psi(t) = D\phi(g(t))Dg(t)$$

Teorema da função inversa

Determinar se uma função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é injetiva (ou seja, determinar se existe a função inversa $f^{-1} : f(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$) é um problema, em geral, muito difícil de resolver explicitamente.

Exemplo 25.2. $n = 1$

$$y = f(x) = \arctan^7(\sqrt[3]{x} - x^5 + x^2) - e^x + 3x^{17}$$

Mesmo que tivéssemos a garantia de que f^{-1} existe seria muito difícil determiná-la explicitamente.

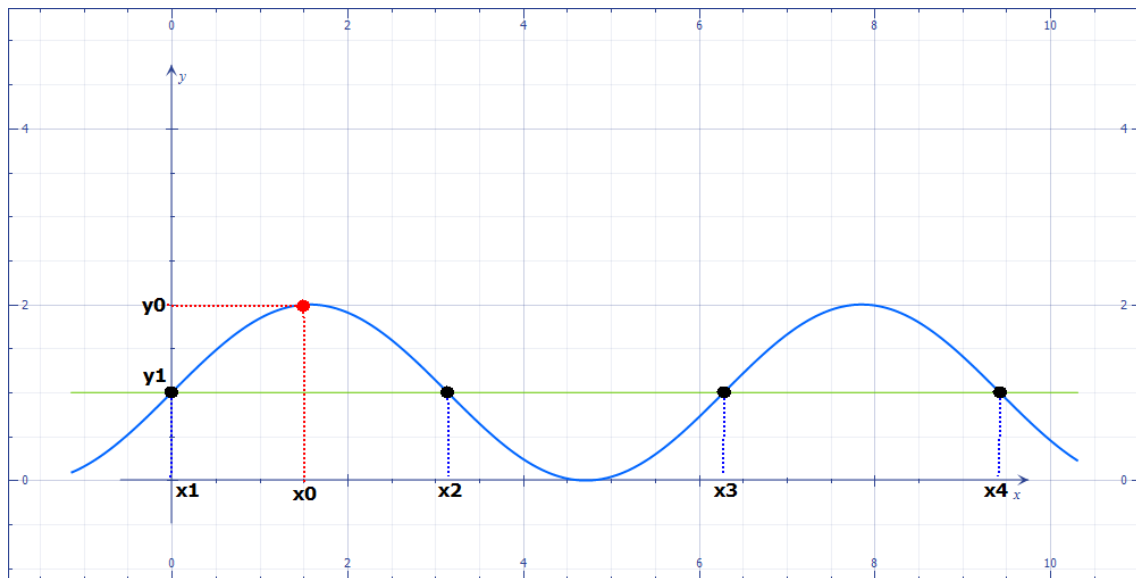
■

Para $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $f = (f_1, \dots, f_n)$ determinar a injetividade (e f^{-1}) $\Rightarrow$ resolver um sistema de n equações com n incógnitas:

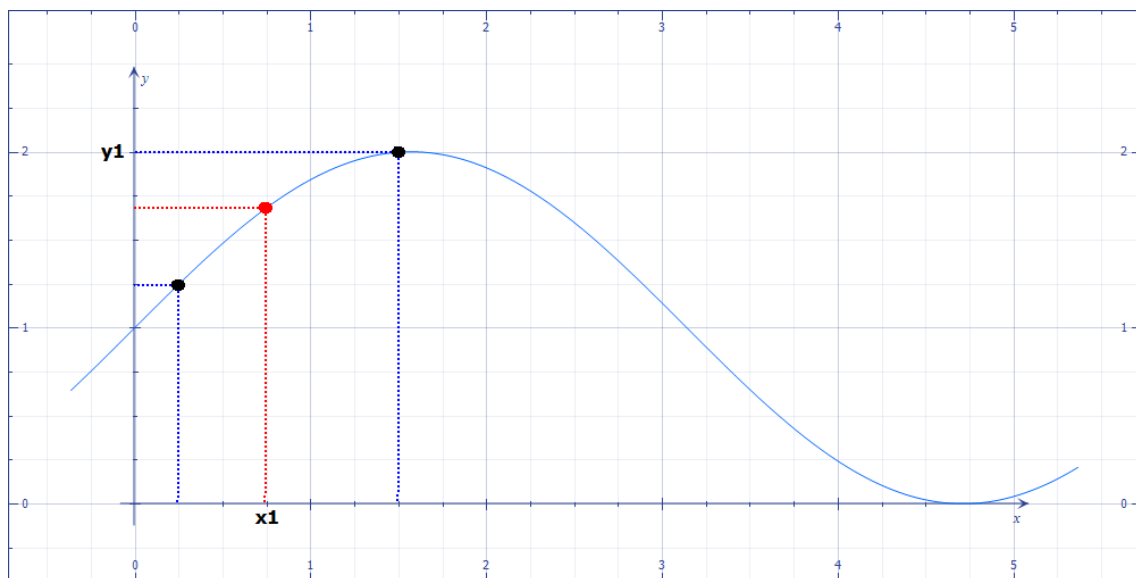
$$\begin{cases} y_1 &= f_1(x_1, \dots, x_n) \\ y_2 &= f_2(x_1, \dots, x_n) \\ &\dots \\ y_n &= f_n(x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

O teorema da função inversa estuda apenas a injetividade local de f .

Exemplo 25.3.



f não é injetiva $\Rightarrow \nexists f^{-1}$



A restrição de f a uma vizinhança aberta suficientemente pequena de x_1 é injetiva.

Dado y suficientemente perto de $y_1 = f(x_1)$, $\exists^1 x$ perto de x_1 com $y = f(x)$.

Observação: $f'(x_1) \neq 0$

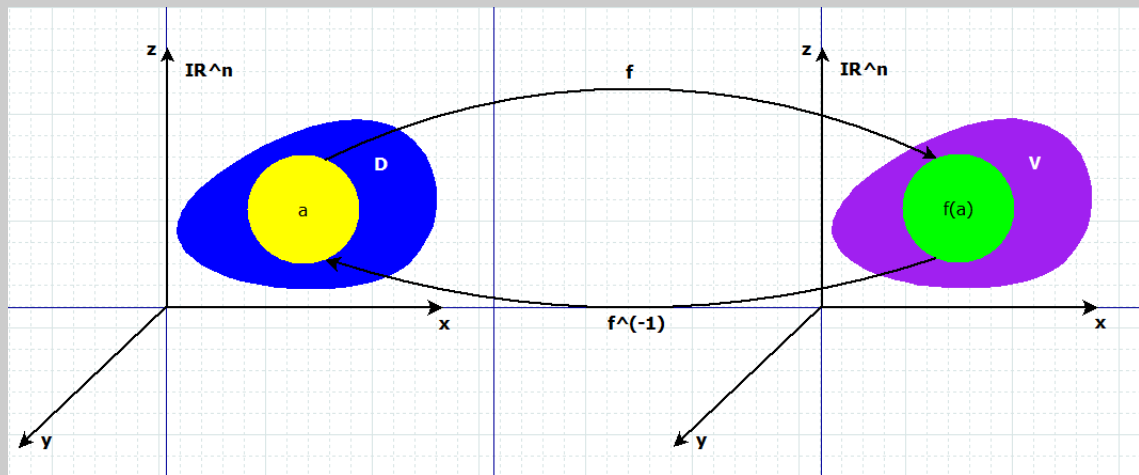
Por contraste, em qualquer vizinhança aberta de x_0 f não é injetiva.

Observação: $f'(x_0) = 0$

Para $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ a condição $f'(a) \neq 0$ é generalizada para $\det Df(a) \neq 0$. ■

Teorema 25.1. [Função inversa] $D \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ classe C^k , $k \geq 1$. Seja $a \in D$ tal que $\det Df(a) \neq 0$. Então $\exists$ uma vizinhança aberta U de a , $a \in U \subset D$ tal que:

1. A restrição de f a U é injetiva (ou seja, $\exists$ inversa local);
2. A imagem $V = f(U)$ é uma vizinhança aberta de $f(a)$ (ou seja, dado y suficientemente perto de $f(a)$, $\exists^1 x \in U$ com $y = f(x)$);
3. A inversa local $f^{-1} : V \rightarrow U$ é de classe C^k e $[Df^{-1}(f(a))] = [Df(a)]^{-1}$



Para y suficientemente perto de $f(a)$, o sistema de equações $y = f(x)$, tem solução única com $x \in U$ ■

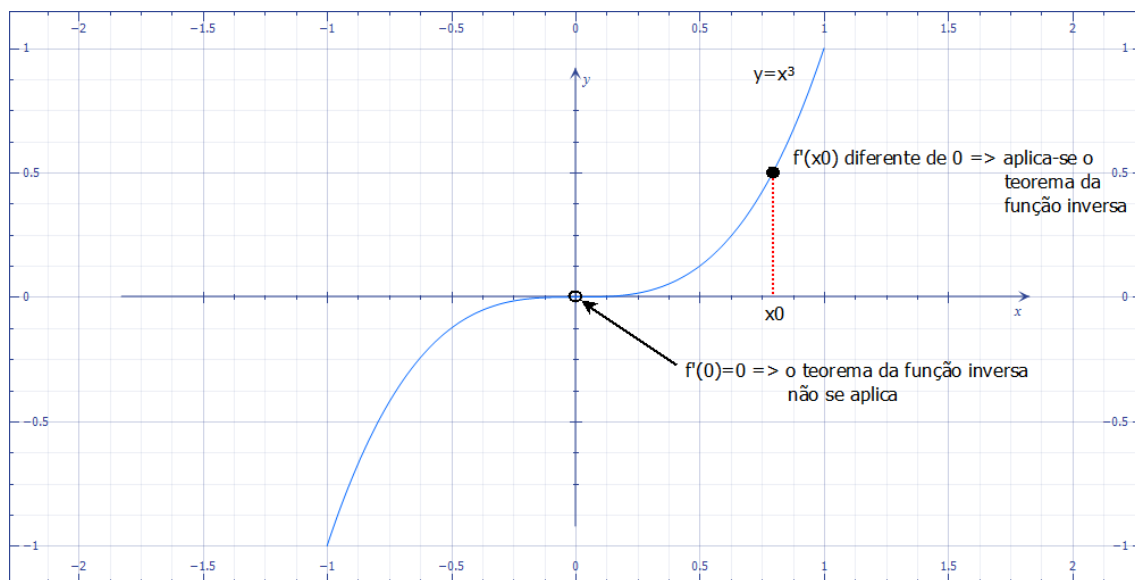
26 Aula de 4 de abril de 2014

O teorema da função inversa nada garante sobre a injetividade global de f , apenas garante a injetividade local em U .

Se $\det Df(a) = 0$ o teorema da função inversa não se aplica. Nalguns casos f será localmente injetiva, noutros não.

Se $\det Df(a) = 0$, mesmo que f seja localmente injetiva, f^{-1} não tem derivada em $f(a)$ porque $[Df(a)]^{-1}$ não existe.

Exemplo 26.1. $y = f(x) = x^3$



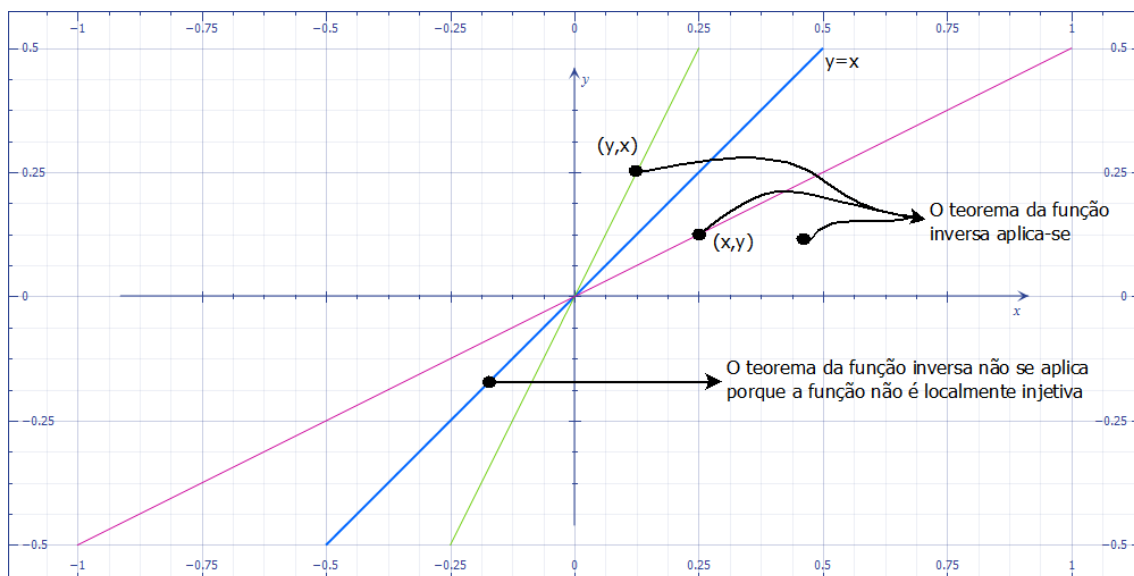
f é injetiva; $x = f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}} \Rightarrow \nexists (f^{-1})'(0)$$

■

Exemplo 26.2. $f(x, y) = (xy, x + y)$; $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$; $f(x, y) = f(y, x)$ logo f não é injetiva.

Facto: $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2) \Leftrightarrow \begin{cases} (x_1, y_1) = (x_2, y_2) \\ (x_1, x_2) = (y_2, x_2) \end{cases}$



Em cada um dos semi-planos separados por $x = y$ a função é injetiva.

$$Df(x, y) = \begin{bmatrix} y & x \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \det Df(x, y) = y - x$$

■

Exemplo 26.3. Considere o sistema de equações:

$$\begin{cases} 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = 2 \\ \sin x + \cos y = 1 \end{cases}$$

1. Mostre que a vizinhança da solução $(x, y) = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ a solução é única.

$$\text{Seja } f(x, y) = \left(1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2, \sin x + \cos y\right)$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = (2, 1)$$

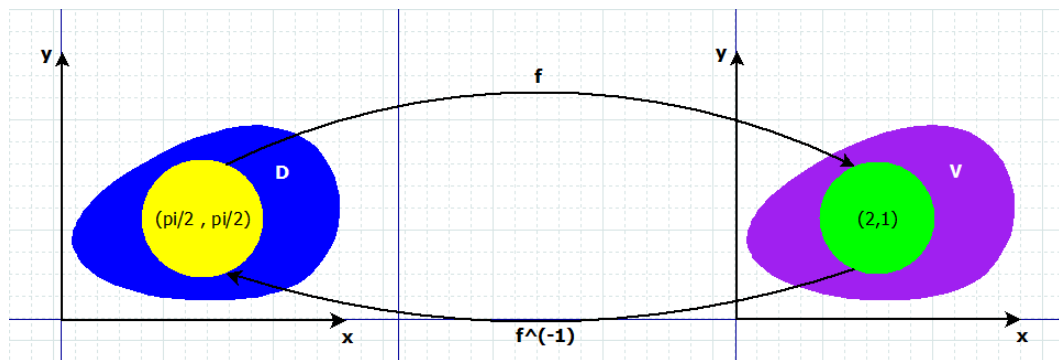
$$\begin{cases} 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = 2 \\ \sin x + \cos y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow f(x, y) = (2, 1)$$

Se f for localmente injetiva em $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ então para $\forall (x, y)$ superfície perto de $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $f(x, y) \neq (2, 1)$ e a solução será única.

$$Df(x, y) = \begin{bmatrix} -\frac{2y^2}{x^3} & \frac{2y}{x^2} \\ \cos x & -\sin y \end{bmatrix}; \quad Df\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = \begin{bmatrix} -\frac{4}{\pi} & \frac{4}{\pi} \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\det Df\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{\pi} \neq 0$$

Do teorema da função inversa tem-se que f é, de facto, localmente injetiva em $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$



$$(u, v) = f(x, y), \quad \begin{cases} u = 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 \\ v = \cos x + \sin y \end{cases}$$

Seguramente em V tem-se $(u, v) = f(x, y) \Leftrightarrow (x, y) = f^{-1}(u, v)$

2. Seja $(u, v) = (2, 1 + \varepsilon)$ com $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno para que $\exists(x, y)$ perto de $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ com $f(x, y) = (2, 1 + \varepsilon)$. Para esse (x, y) , x e y são maiores ou menores que $\frac{\pi}{2}$?

$$\begin{cases} 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = 2 \\ \cos x + \sin y = 1 + \varepsilon \end{cases} \Leftrightarrow f(x, y) = (2, 1 + \varepsilon)$$

$$\begin{aligned}
Df^{-1}(2,1) &= \left[Df\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \right]^{-1} = \\
&= \begin{bmatrix} \frac{4}{\pi} & \frac{4}{\pi} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \\
&= \frac{1}{\frac{4}{\pi}} \begin{bmatrix} -1 & -\frac{4}{\pi} \\ 0 & -\frac{4}{\pi} \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(2,1) & \frac{\partial x}{\partial v}(2,1) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(2,1) & \frac{\partial y}{\partial v}(2,1) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Como $\frac{\partial x}{\partial v}(2,1) = -1 < 0$ e $\frac{\partial y}{\partial v}(2,1) = -1 < 0$ obtemos que x, y irão diminuir quando v aumenta.

■

27 Aula de 7 de abril de 2014

Teorema da função implícita

O Teorema da função inversa trata de $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Dado $y \in \mathbb{R}^n$, $y = f(x)$ é um sistema com n equações e n incógnitas.

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ y_n = f_n(x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

O teorema da função implícita trata de sistemas de m equações com n incógnitas e $m < n$:

$$\begin{cases} F_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ F_m(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

Resolver o sistema significaria, por exemplo,

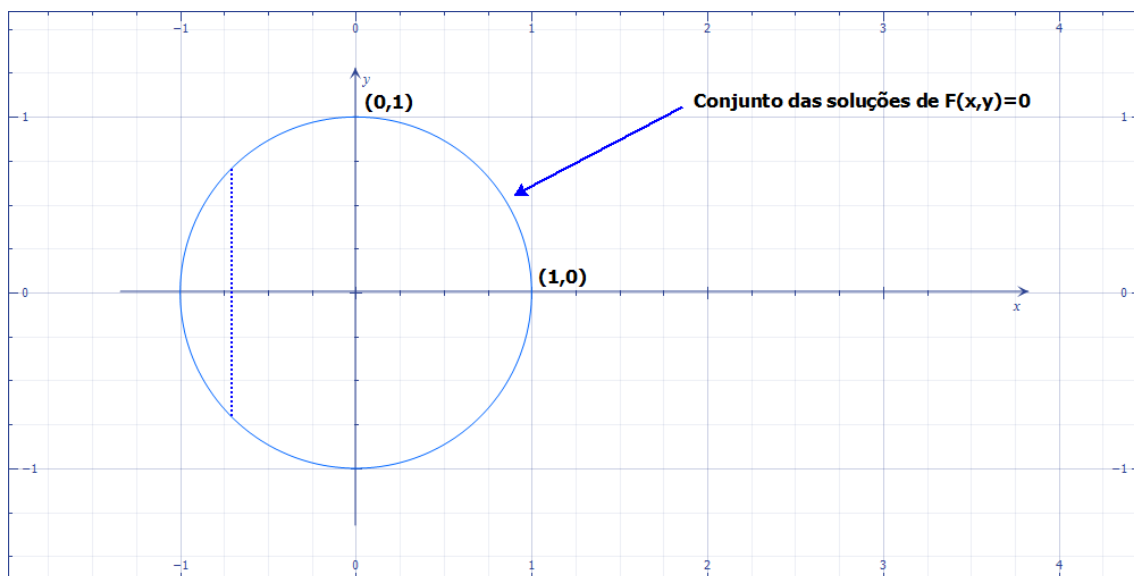
$$\begin{cases} x_1 = f_1(x_{m+1}, \dots, x_n) \\ x_2 = f_2(x_{m+1}, \dots, x_n) \\ \vdots \\ x_m = f_m(x_{m+1}, \dots, x_n) \end{cases}$$

com $F(f_1(x_{m+1}, \dots, x_n), f_2(x_{m+1}, \dots, x_n), \dots, f_m(x_{m+1}, \dots, x_n), x_{m+1}, \dots, x_n) = 0$. Os f_j são as funções implícitas.

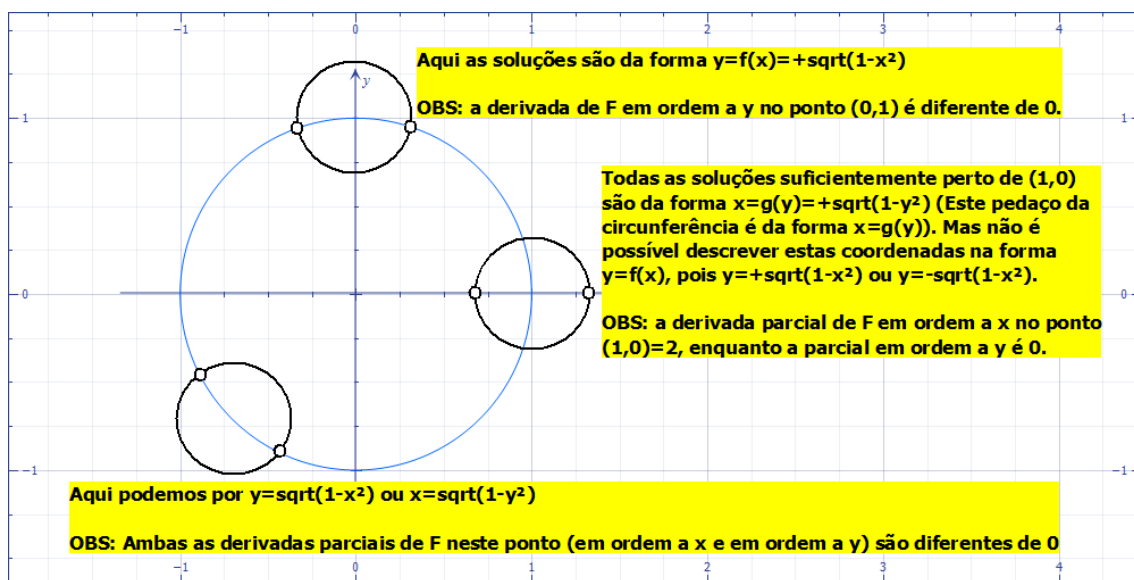
Exemplo 27.1. $m = 1, n = 2, F(x, y) = 0$

Será possível resolver a equação na forma $y = f(x)$ com $F(x, f(x)) = 0$? Ou dever-se-á escolher $x = g(y)$ com $F(g(y), y) = 0$? ■

Exemplo 27.2. $\begin{cases} m = 1 \\ m = 2 \end{cases} \quad F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$



Se tentarmos resolver $F(x, y) = 0$ na forma $y = f(x)$, obtemos $y = \pm\sqrt{1-x^2}$; Logo não é possível escrever simultaneamente todas as soluções de $F(x, y) = 0$ na forma $y = f(x)$. (A circunferência não é um gráfico da forma $y = f(x)$).



$$\begin{cases} F_1(x_1, \dots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ F_m(x_1, \dots, x_n) &= 0 \end{cases} \quad m < n$$

$$z = (x_1, \dots, x_{n-m}) \quad , \quad y = (x_{n-m+1}, \dots, x_n)$$

$$y \in \mathbb{R}^m, z \in \mathbb{R}^{n-m} \quad , \quad x = (z, y) \in \mathbb{R}^n$$

Dada uma solução $x_0 = (z_0, y_0)$, com $F(z_0, y_0) = 0$, será possível descrever todas as soluções na sua vizinhança na forma $y = f(z)$ com $F(z, f(z)) = 0$?

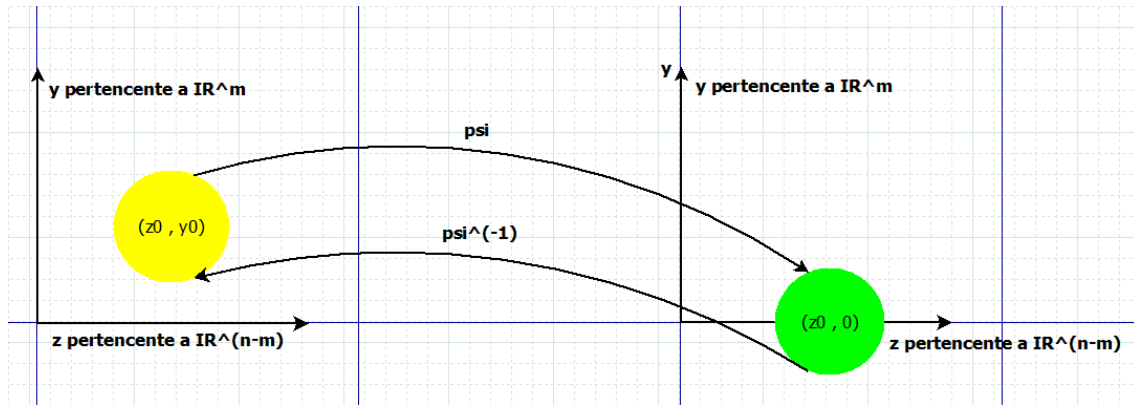
Para aplicarmos o teorema da função inversa vamos completar o sistema de equações:

$$n - eq. \quad \begin{cases} z_1 &= z_1 \\ z_2 &= z_2 \\ &\vdots \\ z_{n-m} &= z_{n-m} \\ F_1(z, y) &= 0 \\ F_m(z, y) &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow F(z, y) = 0$$

Seja $\psi(z, y) = (z, F(z, y))$.

$$F(z, y) = 0 \Leftrightarrow \psi(z, y) = (z, 0) \quad , \quad \psi(z_0, y_0) = (z_0, 0)$$

Suponhamos que $\det D\psi(z_0, y_0) \neq 0$. Então, o teorema da função inversa garante que:



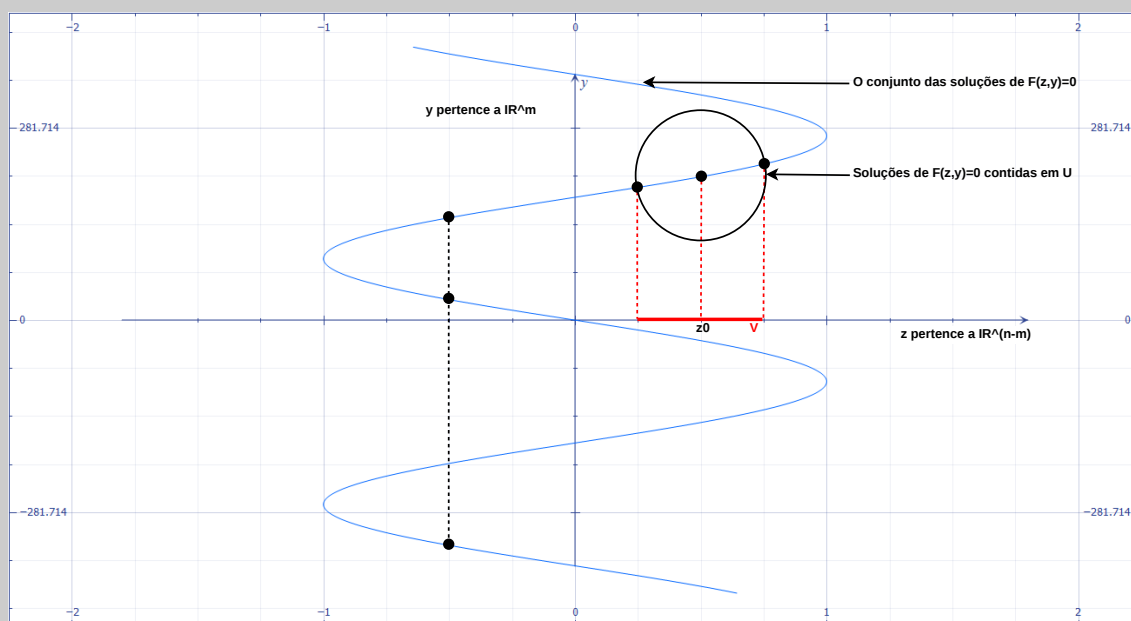
Dado z suficientemente perto de z_0 , $\exists^1 y$ perto de y_0 tal que $\psi(z, y) = (z, 0)$ ou seja $F(z, y) = 0$ ou seja, nesta vizinhança, z determina y : temos $y = f(z)$, e temos $F(z, f(z)) = 0$. Ora,

$$\det D\psi(z_0, y_0) = \det \begin{bmatrix} I & 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z}(z_0, y_0) & \frac{\partial F}{\partial y}(z_0, y_0) \end{bmatrix} = \det \frac{\partial F}{\partial y}(z_0, y_0) \neq 0$$

28 Aula de 9 de abril de 2014

Teorema 28.1 (Função Implícita). $D \subset \mathbb{R}^n$ aberto. $F : D \rightarrow \mathbb{R}^m$, classe C^k , $k \geq 1$, e $n > m$. Escrevemos os pontos $x \in D$ na forma $x = (z, y)$ com $z \in \mathbb{R}^{n-m}$ e $y \in \mathbb{R}^m$.

Seja $(z_0, y_0 \in D)$ tal que $F(z_0, y_0) = 0$ e $\det \left[\frac{\partial F}{\partial y}(z_0, y_0) \right] \neq 0$. Então, $\exists$ vizinhança aberta $U \subset \mathbb{R}^n$, $(z_0, y_0) \in U$, e uma função de classe C^k , $f : V \subset \mathbb{R}^{n-m} \rightarrow \mathbb{R}^m$, onde $V \subset \mathbb{R}^{n-m}$ é aberto com $z_0 \in V$ e: $(z, y) \in U$ e $F(z, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(z)$.



Ou seja, localmente, as soluções $F(z, y) = 0$ formam um gráfico da forma $y = f(z)$.

Nota 28.1. $f(z_0) = y_0$

$F(z, f(z)) = 0, \forall z \in V$

Exemplo 28.1.1. $\begin{cases} U = xy + \sin(x + y) \\ V = e^{-x+y-2} + \frac{x}{y} \end{cases}$ (também se pode resolver com o teorema da função inversa)

1. Mostre que na vizinhança de $(x, y, u, v) = (-1, 1, -1, 0)$, o sistema define (x, y) em função de (u, v) .

$$m = 2, n = 4$$

$$\begin{cases} F_1(x, y, u, v) = u - xy - \sin(x + y) = 0 \\ F_2(x, y, u, v) = v - e^{-x+y-2} - \frac{x}{y} = 0 \end{cases} \quad F = (F_1, F_2)$$

$F(-1, 1, -1, 0) = 0$, logo $(-1, 1, -1, 0)$ é solução

$$DF(x, y, u, v) = \begin{bmatrix} -y - \cos(x+y) & -x - \cos(x+y) & 1 & 0 \\ e^{-x+y-2} - \frac{1}{y} & -e^{-x+y-2} + \frac{x}{y^2} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$DF(-1, 1, -1, 0) = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ \underbrace{0}_x & \underbrace{-2}_y & \underbrace{0}_u & \underbrace{1}_v \end{bmatrix}$$

$$\det \frac{\partial F}{\partial(x, y)}(-1, 1, -1, 0) = \det \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = 4 \neq 0$$

Logo, pelo teorema da função implícita $\Rightarrow \exists$ aberto $V \subset \mathbb{R}^2$, com $(-1, 0) \in V$ e $\exists f : V \rightarrow \mathbb{R}^2$ com $x = f_1(u, v)$, $y = f_2(u, v)$ com $F(f_1(u, v), f_2(u, v), u, v) = 0, \forall (u, v) \in V$

2. Calcule $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(-1, 0)$

$$f = (f_1, f_2); f(-1, 0) = (-1, 1)$$

como calcular $Df(-1, 0)$?

Seja $\psi(u, v) = (f_1(u, v), f_2(u, v), u, v); \psi(-1, 0) = (-1, 1, -1, 0)$ então:

$$\underbrace{F \circ \psi}_{=F(f_1(u, v), f_2(u, v), u, v)} = 0, \forall (u, v) \text{ num aberto.}$$

$\Downarrow$

$$\begin{aligned} D(F \circ \psi)(-1, 0) &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow DF(-1, 1, -1, 0) \cdot D\psi(-1, 0) &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u}(-1, 0) & \frac{\partial f_1}{\partial v}(-1, 0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial u}(-1, 0) & \frac{\partial f_2}{\partial v}(-1, 0) \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} &= 0 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \cdot Df(-1,0) + I &= 0 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow Df(-1,0) &= - \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}^{-1} = \\
= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u}(-1,0) & \frac{\partial f_1}{\partial v}(-1,0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial u}(-1,0) & \frac{\partial f_2}{\partial v}(-1,0) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(-1,0) & \frac{\partial x}{\partial v}(-1,0) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(-1,0) & \frac{\partial y}{\partial v}(-1,0) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

■

Exemplo 28.1.2. $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x^2 + y^2 = z^2 \end{cases}$

Na vizinhança de $(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$, x determina y e z ?

Calcule $y' \left(\frac{1}{2}\right)$, $z' \left(\frac{1}{2}\right)$

$$n = 3, m = 2$$

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = x + y + z - 1 = 0 \\ F_2(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 = 0 \end{cases}$$

$$F = (F_1, F_2)$$

$$F\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right) = 0$$

$$DF(x, y, z) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \end{bmatrix} \quad ; \quad DF\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right) = \begin{bmatrix} 1 & \underbrace{0}_y & \underbrace{-1}_z \\ 1 & & \end{bmatrix}$$

$$\det \frac{\partial F}{\partial (x, y)} \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right) = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -1 \neq 0$$

Teorema da função implícita $\Rightarrow \exists$ intervalo aberto $V \subset \mathbb{R}$ com $\frac{1}{2} \in V$, e uma função $f : V \longrightarrow \mathbb{R}^2$, com $F(x, f_1(x), f_2(x)) = 0, \forall x \in V$

$$y = f_1(x), z = f_2(x) \quad , \quad f\frac{1}{2} = \left(0, \frac{1}{2}\right)$$

Seja $\psi(x) = (x, f_1(x), f_2(x))$.

$$\begin{aligned}
F \circ \psi(x) &= 0, \forall x \in V \Rightarrow \\
&\Rightarrow D(F \circ \psi) \left(\frac{1}{2} \right) = 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow DF \left(\psi \left(\frac{1}{2} \right) \right) D\psi \left(\frac{1}{2} \right) = 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow DF \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} \right) D\psi \left(\frac{1}{2} \right) = 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ f'_1 \left(\frac{1}{2} \right) \\ f'_2 \left(\frac{1}{2} \right) \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \\
&\Rightarrow \begin{cases} f'_2 \left(\frac{1}{2} \right) = 1 = \frac{dz}{dx} \left(\frac{1}{2} \right) \\ f'_1 \left(\frac{1}{2} \right) = -2 = \frac{dy}{dx} \left(\frac{1}{2} \right) \end{cases}
\end{aligned}$$

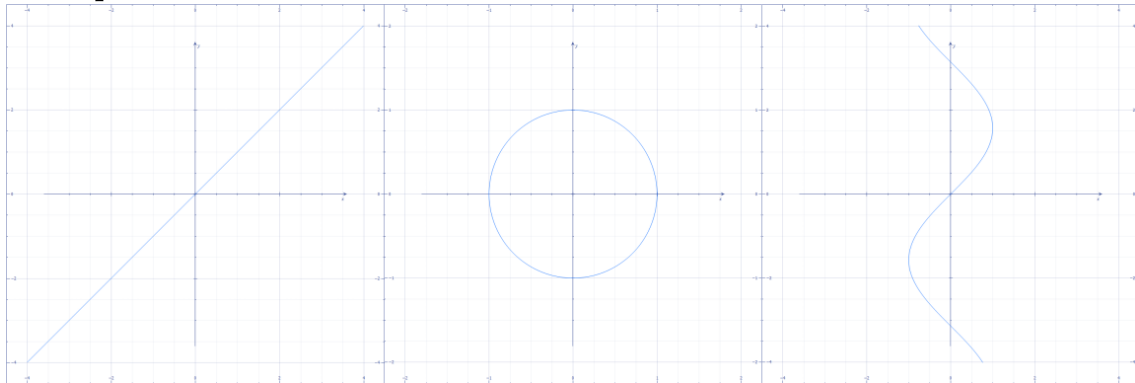
■

29 Aula de 10 de abril de 2014

Variedades diferenciais

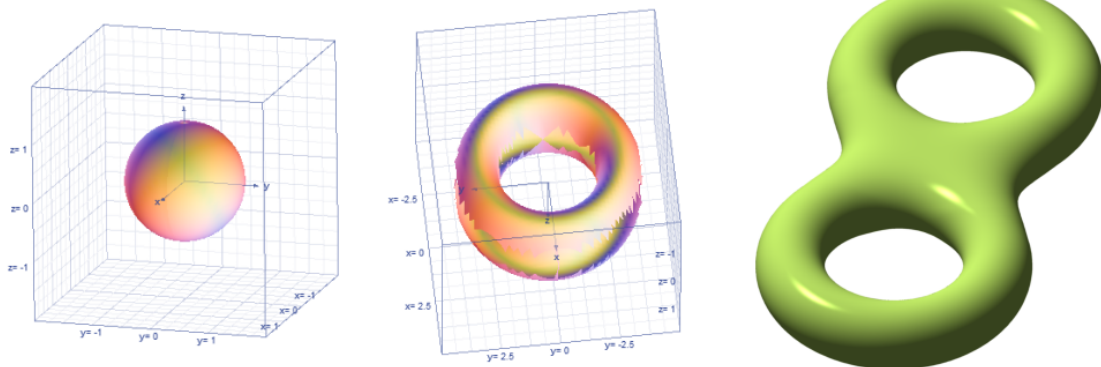
Uma variedade diferencial de dimensão k é um objeto geométrico, com boas propriedades, descrito localmente à custa de k parâmetros (coordenadas).

Exemplo 29.1. $k = 1$



■

Exemplo 29.2. $k = 2$



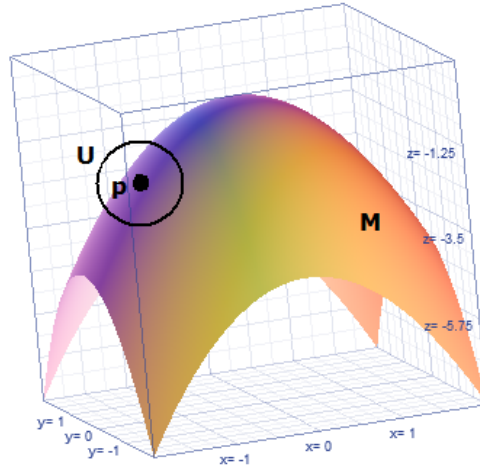
■

Exemplo 29.3. k : Plano k em $\mathbb{R}^n$.

■

Definição 29.1. $M \subset \mathbb{R}^n$ é uma variedade diferencial de dimensão k ($1 \leq k < n$), ou simplesmente variedade- k , se $\forall p \in M$, $\exists$ aberto $U \subset \mathbb{R}^n$, com $p \in U$, e uma função de classe C^1 , $F \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ tal que: $x \in M \cap U \Leftrightarrow F(x) = 0$ e característica $DF(x) = n - k, \forall x \in U$.

Característica $DF(x) = \text{dimensão do espaço das linhas} = \text{dimensão do espaço das colunas}$.



$$M \cap U \Leftrightarrow F(x) = 0$$

■

Teorema 29.1. $M \subset \mathbb{R}^n$ é uma variedade- k sse localmente M é um gráfico de uma função de classe C^1 , $f : V \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$, V aberto. ■

Demonstração. $\Rightarrow$ Teorema da função implícita. $\Leftarrow$ se $y = f(z)$ então $F(z, y) = y - f(z) = 0$. □

A condição característica $DF(x) = n - k$ garante que estamos de facto a impor $n - k$ equações independentes.

$$P \in M \cap U$$

$$\text{Característica } DF(P) = n - k \Leftrightarrow F = (F_1, \dots, F_{n-k})$$

$$DF(P) = \begin{bmatrix} - & \nabla F_1(P) & - \\ - & \nabla F_2(P) & - \\ & \vdots & \\ - & \nabla F_{n-k}(P) & - \end{bmatrix} \text{ com } \nabla F_1(P), \dots, \nabla F_{n-k}(P) \\ \text{linearmente independentes.}$$

M é conjunto de nível para $F \rightsquigarrow \nabla F_j(P)$ são $\perp$ a M .

Definição 29.2. O espaço normal a M em P é o espaço vetorial de dimensão $(n - k)$ gerado por $\nabla F_1(P), \dots, \nabla F_{n-k}(P)$.

$$\{\nabla F_1(P), \dots, \nabla F_{n-k}(P)\} \text{ base de } T_P M^\perp$$

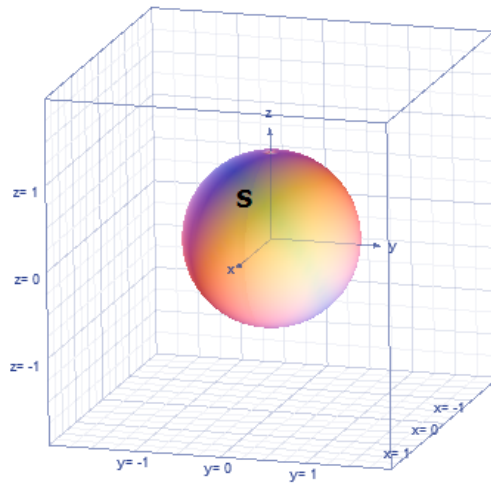
■

O espaço tangente a M em P é:

$$T_P M = \{v \in \mathbb{R}^n : v \cdot n = 0, n \in T_P M^\perp\}$$

$$\begin{cases} \dim T_P M = \dim M = k \\ \dim T_P M^\perp = n - k \end{cases}$$

Exemplo 29.4. $S \subset \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$



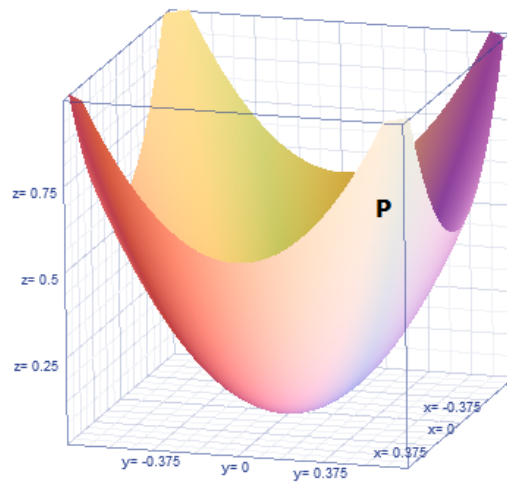
$$\begin{cases} n = 3 \\ n - k = 1 \\ k = 2 \end{cases}$$

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$$

$$DF(x, y, z) = [2x \quad 2y \quad 2z]$$

A matriz derivada de F tem característica 1 exceto se $(x, y, z) = (0, 0, 0)$; mas $F(0, 0, 0) \neq 0$, $(0, 0, 0) \notin S$. Logo S é variedade-z. Localmente S é um gráfico, por exemplo o hemisfério norte é dado por $z = +\sqrt{1 - x^2 - y^2}$; o hemisfério leste é dado por $y = +\sqrt{1 - x^2 - z^2}$. ■

Exemplo 29.5. Parabolóide P: $\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x^2 + y^2 < 1 \end{cases}$, $\begin{cases} n = 3 \\ n - k = 1 \\ k = 2 \end{cases}$



P é o gráfico de $z = f(x, y) = x^2 + y^2$, com $x^2 + y^2 < 1$; $F(x, y, z) = z - x^2 - y^2 = 0$.
 $DF(x, y, z) = [-2x \ -2y \ 1] \leftarrow$ tem sempre característica 1 $\Rightarrow P$ é variedade- z .

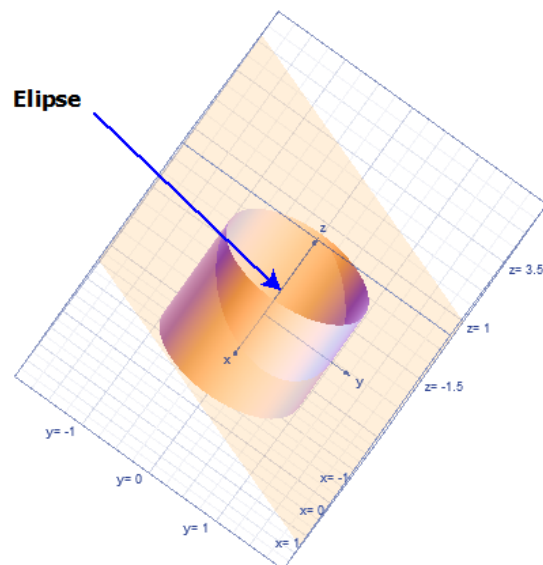
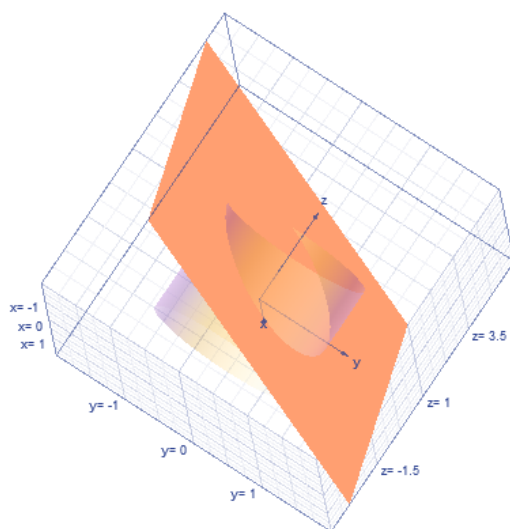
Seja $P = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \in D$.

$$DF(P) = [-1 \ -1 \ 1] \quad , \quad T_P P^\perp = \{ \lambda(-1, -1, 1), \lambda \in \mathbb{R} \}$$

$$T_P P = \{ a(1, -1, 0) + b(0, 1, 1), a, b \in \mathbb{R} \}$$

■

Exemplo 29.6. $C \subset \mathbb{R}^3 : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} n = 3 \\ n - k = 2 \\ k = 1 \end{cases}$



$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ F_2(x, y, z) = x + y + z - 1 = 0 \end{cases} \quad F = (F_1, F_2)$$

$$DF(x, y, z) = \begin{bmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Se $(x, y) \neq (0, 0)$, a característica é 2 mas $\neq (0, 0, z) \neq 0$ logo C é *var* - 1.

$$\text{Seja } P = (1, 0, 0), \quad DF(P) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_P C^\perp = \{a(2, 0, 0) + b(1, 1, 1), a, b \in \mathbb{R}\}$$

$$T_P C = \{\lambda(0, 1, -1), \lambda \in \mathbb{R}\}$$

■

30 Aula de 11 de abril de 2014

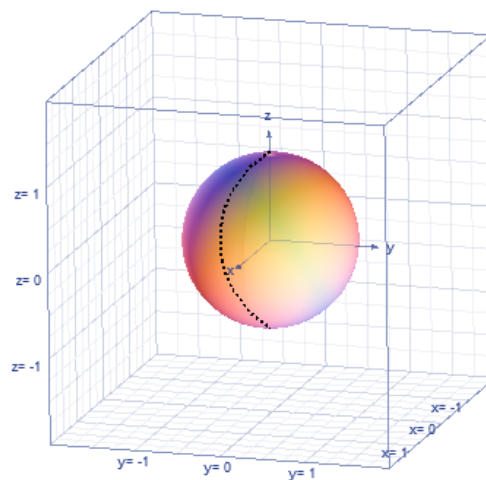
Esta aula serviu somente para fazer revisões para o teste, pelo que não vai ser abordada nestes resumos.

31 Aula de 14 de abril de 2014

Parametrizações

Uma parametrização de uma variedade- k é uma descrição de variedade em termos de k coordenadas (parâmetros livres).

Exemplo 31.1. $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$



θ longitude; φ latitude;

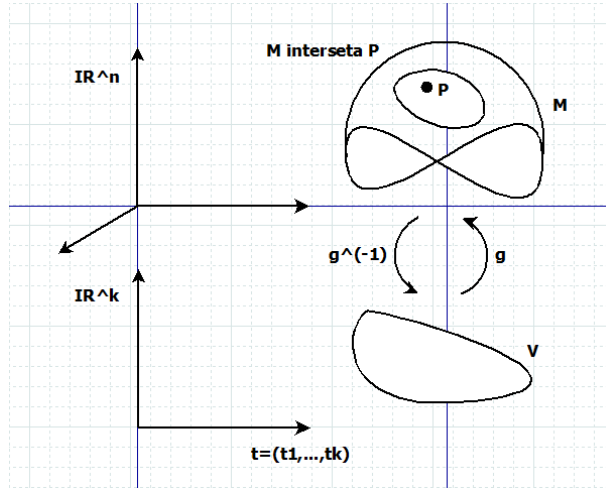
$$g(\theta, \varphi) = (\cos \theta \sin \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \varphi)$$

$$\theta \in]0, 2\pi[, \varphi \in]0, \pi[$$

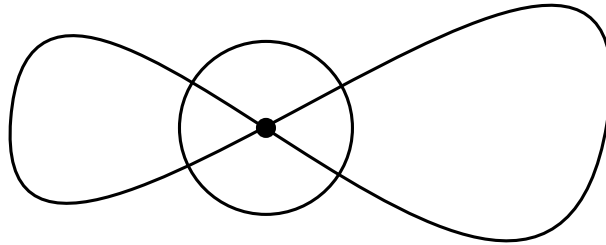
■

Definição 31.1. $M \subset \mathbb{R}^n$ variedade- k . Uma parametrização local de M em $P \in M$, é uma função de classe C^1 , $g : V \subset \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^n$, com V aberto, $g(V) = M \cap U$, $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $P \in U$, tal que:

1. g é injetiva;
2. g^{-1} é contínua;
3. $Dg(t)$ é injetiva $\forall t \in V$ (ou seja, tem característica máxima).



- A condição 2 elimina os casos patológicos como por exemplo:



- A condição 3 garante que as k colunas de $Dg(t)$ são independentes:

$$Dg(t) = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \frac{\partial g}{\partial t_1}(t) & \frac{\partial g}{\partial t_2}(t) & \cdots & \frac{\partial g}{\partial t_k}(t) \\ | & | & & | \end{bmatrix}, n \times k, (n > k)$$

O espaço vetorial de dimensão- k gerado pelas colunas de $Dg(t)$ é o espaço tangente $T_{g(t)}M$, isto é,

$$\left\{ \frac{\partial g}{\partial t_1}(t), \dots, \frac{\partial g}{\partial t_k}(t) \right\}$$

é base de $T_{g(t)}M$.

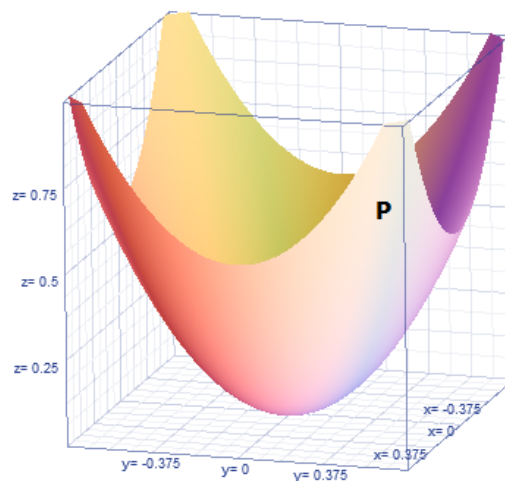
Porquê?: Se M localmente em P é descrita por $F = 0$ então $F \circ g(t) = 0, \forall t \Rightarrow \overline{DF(g(t))} Dg(t) = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{bmatrix} - & \nabla F_1(g(t)) & - \\ & \vdots & \\ - & \nabla F_{n-k}(g(t)) & - \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | & & | \\ \frac{\partial g}{\partial t_1}(t) & \cdots & \frac{\partial g}{\partial t_k}(t) \\ | & & | \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\nabla F_j(g(t))}_{\text{normais}} \underbrace{\frac{\partial g}{\partial t_i}(t)}_{\text{tangentes}} = 0$$

Teorema 31.1. $M \subset \mathbb{R}^n$ é variedade- k sse M é parametrizável localmente em todo $P \in M$

Demonstração. $\Rightarrow$ teorema da função implícita: $F(z, y) = 0 \rightsquigarrow y = f(z) \rightarrow g(z) = (z, f(z))$ é parametrizável. (Exercício) ■
■
■

Exemplo 31.2. $\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x^2 + y^2 < 1 \end{cases}$ é var - z .



$$g(x, y) = (x, y, x^2 + y^2), x^2 + y^2 < 1$$

$$g \text{ classe } C^1, \quad g^{-1} \text{ continua}$$

$$Dg(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2x & 2y \end{bmatrix} \text{ tem característica} = 2 \Rightarrow \text{é parametrizável}$$

$$\text{Seja } a = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \in P$$

$$Dg\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_a P = \{a(1, 0, 1) + b(0, 1, 1), a, b \in \mathbb{R}\}$$

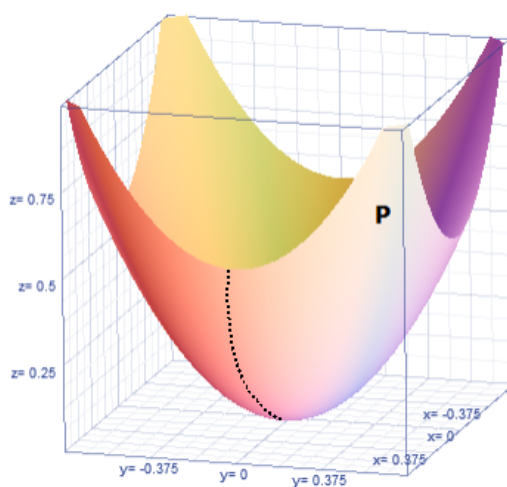
$$T_a P^\perp = \{\lambda(1, 1, -1), \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Outra parametrização:

$$h(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, \rho^2), \rho \in]0, 1[, \theta \in]0, 2\pi[$$

ou

$$f(z, \theta) = (\sqrt{z} \cos \theta, \sqrt{z} \sin \theta, z), z \in]0, 1[, \theta \in]0, 2\pi[$$



■

Exemplo 31.3. Elipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$, $var - 1$

$$\begin{cases} x = 2 \cos \theta \\ y = 3 \sin \theta \end{cases} , \quad \theta \in]0, 2\pi[$$

$$g(\theta) = (2 \cos \theta, 3 \sin \theta), \theta \in]0, 2\pi[$$

$$Dg(\theta) = \begin{bmatrix} -2 \sin \theta \\ 3 \cos \theta \end{bmatrix} \longleftrightarrow \text{vetor velocidade } g'(\theta) = (-2 \sin \theta, 3 \cos \theta) \text{ (Tangente a } E)$$

■

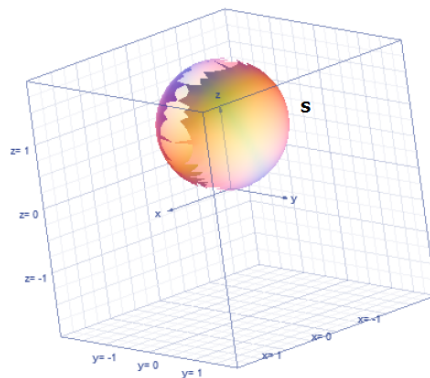
32 Aula de 23 de abril de 2014

Extremos condicionados

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, Classe C^1 ; $M \subset \mathbb{R}^n$ variedade- k , $k < n$

Como encontrar o máximo e o mínimo dos valores que f toma sobre M ?

Exemplo 32.1. $S : x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$



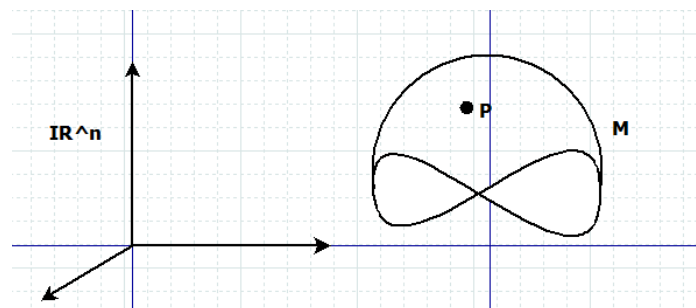
$$f(x, y, z) = z$$

Os valores de f sobre S tomam o máximo ($= 2$) em $(0, 0, 2)$ e o mínimo ($= 0$) em $(0, 0, 0)$.

Observação: $\nabla f(x, y, z) = (0, 0, 1) \neq 0$



$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, Classe C^1 ; $M \subset \mathbb{R}^n$ variedade- k , $k < n$



Suponhamos que $p \in M$ é um extremo local (por exemplo máximo local) dos valores da restrição de f a M .

Seja $\gamma(x)$ um caminho que descreve uma curva contida em M , com $\gamma(0) = P$. Então a função $f \circ \gamma(t)$ terá um extremo local em $t = 0$.

$$\Rightarrow \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f \circ \gamma(t) = 0 \Leftrightarrow \nabla f(P) \cdot \gamma'(0) = 0$$

Observação: $\gamma'(0) \in T_P M$.

O argumento é válido para qualquer $v \in T_P M$. (para qualquer $v \in T_P M$ encontramos uma curva $\gamma(t)$, como acima, com $\gamma'(0) = v$) $\Rightarrow \nabla f(P) \cdot v = 0, \forall v \in T_P M$

$$\nabla f(P) \in T_P M^\perp$$

Se localmente em P , M é descrita por $F_1(x) = F_2(x) = \dots = F_{n-k}(x) = 0$, com característica $DF(P) = n - k$, então $\{\nabla F_1(P), \dots, \nabla F_{n-k}(P)\}$ é base de $T_P M^\perp \Rightarrow \exists \lambda_1, \dots, \lambda_{n-k} \in \mathbb{R}$ tais que $\nabla f(P) = \lambda_1 \nabla F_1(P) + \dots + \lambda_{n-k} \nabla F_{n-k}(P)$.

Os λ_j chamam-se multiplicadores de Lagrange

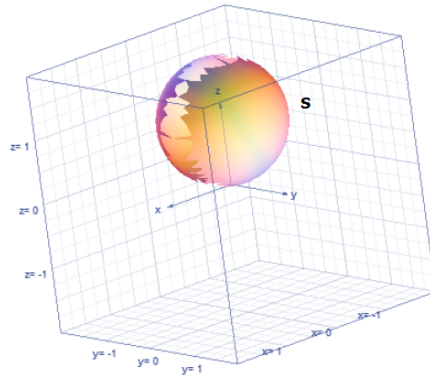
Teorema 32.1. $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, Classe C^1 ; $M \subset \mathbb{R}^n$ variedade- k , $k < n$

Se $P \in M$ é extremo local da restrição de f a M , então $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_{n-k} \in \mathbb{R}$ tais que $\nabla f(P) = \lambda_1 \nabla F_1(P) + \dots + \lambda_{n-k} \nabla F_{n-k}(P)$, onde localmente M é descrita por $F_1(x) = F_2(x) = \dots = F_{n-k}(x) = 0$ com característica $DF(P) = n - k$

$$\underbrace{\left\{ \begin{array}{l} F_1(P) = 0 \\ \vdots \\ F_{n-k}(P) = 0 \end{array} \right.}_{n-k \text{ eq.}} ; \underbrace{\nabla f(P) = \lambda_1 \nabla F_1(P) + \dots + \lambda_{n-k} \nabla F_{n-k}(P)}_{n \text{ eq.}} \underbrace{\hspace{10em}}_{2n-k \text{ eq.}}$$

Incógnitas: $P = (P_1, P_2, \dots, P_n); \underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_{n-k}}_{2n-k \text{ inc.}}$ ■

Exemplo 32.1.1. $S : x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$



$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + (z - 1)^2 - 1 = 0$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1 \\ \nabla f = \lambda \nabla F \Leftrightarrow (0, 0, 1) = \lambda(2x, 2y, 2(z - 1)) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 2\lambda x \\ 0 = 2\lambda y \\ 1 = 2\lambda(z - 1) \end{cases} \end{cases}$$

$$1 = 2\lambda(z - 1) \Rightarrow \lambda \neq 0 \Rightarrow x = y = 0 \Rightarrow z = 2 \vee z = 0$$

2 soluções: $(0, 0, 0)$ e $(0, 0, 2)$

f contínua, S compacto $\Rightarrow \exists$ máximo e mínimo.

$$f(0, 0, 0) = 0 \Rightarrow (0, 0, 0) \text{ min}, (0, 0, 2) \text{ max}$$

■

Exemplo 32.1.2. $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$

$$f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 4z^2$$

Quais os valores máximo e mínimo de f em B ?

f é contínua, B é compacto $\Rightarrow \exists$ máximo e mínimo.

Interior de $B : x^2 + y^2 + z^2 < 1$

$$\nabla f(x, y, z) = (2x, 4y, 8z) = (0, 0, 0) \Rightarrow x = y = z = 0$$

$\Rightarrow (0, 0, 0)$ é o único ponto crítico de f . $(0, 0, 0) \in B$.

$$Hf(0, 0, 0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow (0, 0, 0)$ é um mínimo local. $f(0, 0, 0) = 0$

Fronteira de $B : x^2 + y^2 + z^2 = 1$

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ \nabla f = \lambda \nabla F \Leftrightarrow (2x, 4y, 8z) = \lambda(2x, 2y, 2z) \end{cases}$$

$$2x = \lambda 2x \begin{cases} \lambda = 1 \begin{cases} 4y = 2y \\ 8z = 2z \end{cases} \Rightarrow y = z = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \\ x = 0 \longrightarrow 4y = \lambda 2y \begin{cases} \lambda = 2 \longrightarrow 8z = 4z \Leftrightarrow z = 0 \Rightarrow y = \pm 1 \\ y = 0 \Rightarrow z = \pm 1 \end{cases} \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$ 6 soluções: $(\pm 1, 0, 0), (0, \pm 1, 0), (0, 0, \pm 1)$

$$f = x^2 + 2y^2 + 4z^2$$

$$f(\pm 1, 0, 0) = 1, \quad f(0, \pm 1, 0) = 2, \quad f(0, 0, \pm 1) = 4$$

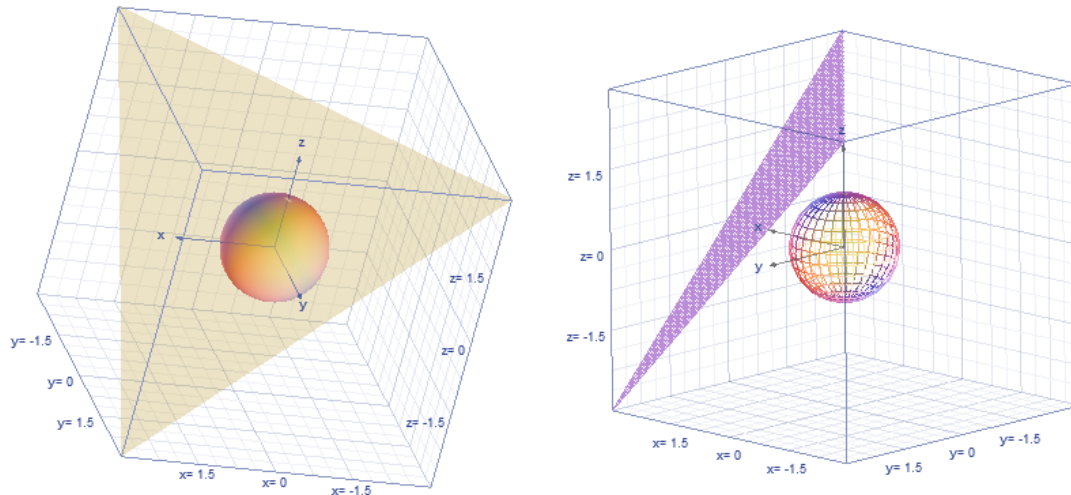
$$\Downarrow$$

$$(0, 0, \pm 1) \text{ max}, (0, 0, 0) \text{ min}$$



33 Aula de 24 de abril de 2014

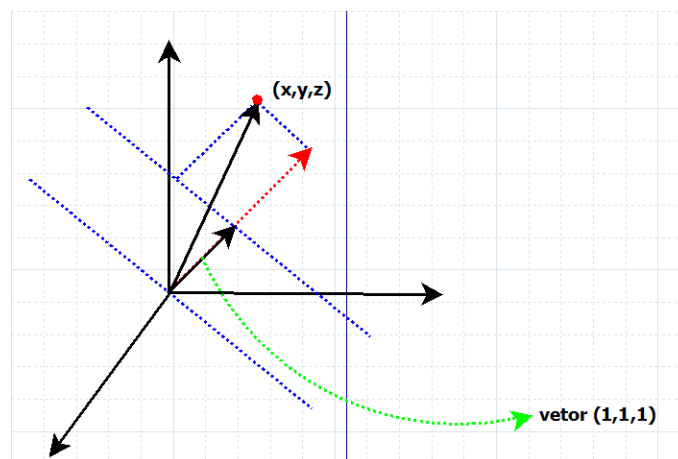
Exemplo 33.1. Qual é a distância mínima da superfície esférica de raio 1 centrada na origem ao plano $x + y + z = 3$?



$$\min = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \quad , \quad \max = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

Porque $(1, 1, 1)$ é $\perp$ ao plano.

Como se calcula a distância ao plano $x + y + z = 3$?



$d(x, y, z)$ = distância de (x, y, z) ao plano $x + y + z = 3$ = módulo da projeção de (x, y, z) sobre $(1, 1, 1)$ que é $(1, 1, 1)$. Equivalentemente tem-se:

$$\left\| \frac{(x, y, z) \cdot (1, 1, 1)}{\|(1, 1, 1)\|^2} (1, 1, 1) - (1, 1, 1) \right\| = \sqrt{3} \left| \frac{x + y + z}{3} - 1 \right|$$

Para evitar o problema da não-diferenciabilidade do módulo vamos usar $d^2(x, y, z)$ (os mínimos e máximos de d e d^2 coincidem).

$$d^2(x, y, z) = 3 \left(\frac{x+y+z}{3} - 1 \right)^2$$

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ \nabla d^2 = \lambda \nabla F \Leftrightarrow z \left(\frac{x+y+z}{3} - 1 \right) (1, 1, 1) = \lambda (2x, 2y, 2z) \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$x = y = z \Rightarrow 3x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\leadsto 2 \text{ soluções: } \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right), \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

A superfície esférica é compacta; d^2 é contínua $\Rightarrow \exists$ máximo e mínimo.

$$d^2 \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) < d^2 \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

$\Downarrow$

$$\min = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right), \quad \max = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

■

Integrais de campos escalares em variedades

Até aqui utilizámos o integral para calcular volumes- n em $\mathbb{R}^n$, agora queremos utilizá-lo para calcular volumes- k em $\mathbb{R}^n$, ($k < n$), por exemplo, a área (= $\text{volume}(2)$) de uma superfície em $\mathbb{R}^3$.

Da mesma forma que os intervalos em $\mathbb{R}^n$ (paralelepípedos- n) serviram como “unidades de medida” de volume- n , as “unidades de medida” de volume- k em $\mathbb{R}^n$, $k < n$, serão os paralelepípedos- k .

Dados $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$, linearmente independentes, qual é o volume- k do paralelepípedo- k por eles formado?

Esse volume é dado da seguinte forma:

Seja E a matriz $n \times k$:

$$E = \begin{bmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_k \\ | & & | \end{bmatrix}$$

$$[E^T E]_{ij} = v_i \cdot v_j$$

$$E^T E \quad k \times k; (E^T E)_{ij} = v_i \cdot v_j = (E^T T)_{ji}$$

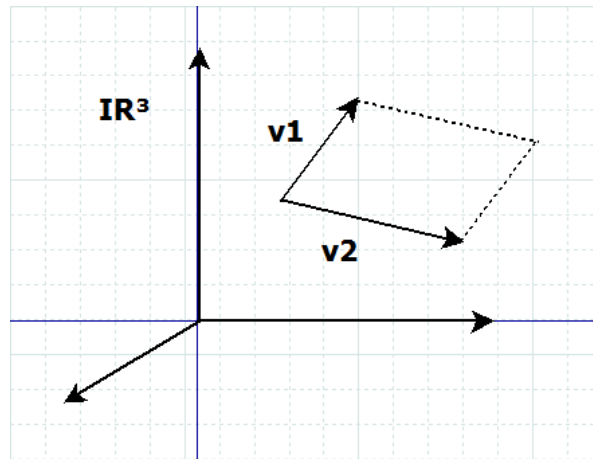
O volume- k é $V(v_1, \dots, v_k) = \sqrt{\det(E^T E)}$

Nota 33.1. Esta é a única função de $v_1, \dots, v_k$ que satisfaz uma lista de propriedades naturais que o volume- k tem que satisfazer. ■

Exemplo 33.2. $k = 1, v \in \mathbb{R}^n$

$vol - 1 = \text{comprimento} = ||v||; (E^T E)_{11} = v \cdot v = ||v||^2; \sqrt{\det(E^T E)} = \sqrt{||v||^2} = ||v||$ ■

Exemplo 33.3. $k = 2, n = 3$



$$Area = ||v_1 \times v_2|| = ||v_1|| \times ||v_2|| \times |\sin \theta|$$

$$E^T E = \begin{bmatrix} v_1 \cdot v_1 & v_1 \cdot v_2 \\ v_1 \cdot v_2 & v_2 \cdot v_2 \end{bmatrix}$$

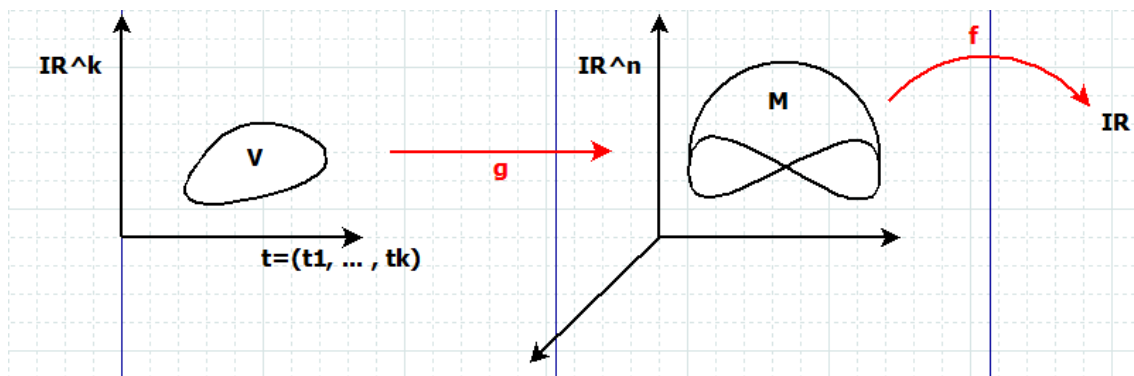
$$\begin{aligned} \det(E^T E) &= ||v_1||^2 \cdot ||v_2||^2 - ||v_1||^2 \cdot ||v_2||^2 \times \cos^2 \theta = \\ &= ||v_1||^2 \cdot ||v_2||^2 \times (1 - \cos^2 \theta) = \\ &= ||v_1||^2 \cdot ||v_2||^2 \times \sin^2 \theta \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sqrt{\det(E^T E)} = ||v_1|| \cdot ||v_2|| \times \sin \theta = \\ &= ||v_1 \times v_2|| \end{aligned}$$

■

34 Aula de 28 de abril de 2014

Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ uma porção parametrizável de uma variedade- k (ou seja, uma vizinhança de coordenadas).

Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Como definir $\int_M f$?



g parametrização

$$g(V) = M$$

$$\int_M f = ?$$

Uma ideia seria integrar $f \circ g$ em V .

Para isso temos que corrigir as deformações de volume- k causadas por g .

Seja $a \in V$ e P um pequeno paralelepípedo- k perto de a , com arestas:

$$(\Delta t_1, 0, 0, \dots, 0), (0, \Delta t_2, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 0, \Delta t_k)$$

$$\text{Volume-}k(P) = \Delta t_1 \Delta t_2 \dots \Delta t_k.$$

Em geral g não é linear e por isso $g(P)$ não será um paralelepípedo- k .

No entanto, como g é diferenciável ela é muito bem aproximada, perto de a , pela transformação linear

$$Dg(a) : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Como $Dg(a)$ é linear, transforma P no paralelepípedo- k definido pelos vetores

$$Dg(a) \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \Delta t_j \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial t_1}(a) & \dots & \frac{\partial g}{\partial t_k}(a) \\ \vdots & & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \Delta t_j \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \Delta t_j \frac{\partial g}{\partial t_j}(a)$$

, ou seja, as arestas de $Dg(a)(P)$ são:

$$\frac{\partial g}{\partial t_1}(a)\Delta t_1, \dots, \frac{\partial g}{\partial t_k}(a)\Delta t_k$$

Logo o volume- k de $Dg(a)(P)$ é:

$$Vol - k(Dg(a)(P)) = \underbrace{\Delta t_1 \cdots \Delta t_k}_{volume(P)} \sqrt{\det(Dg^T(a)Dg(a))}$$

ou seja, localmente em $a \in V$, g afeta os volumes- k multiplicando-os por um fator de

$$\sqrt{\det(Dg^T(a)Dg(a))}$$

Logo, faz sentido definir:

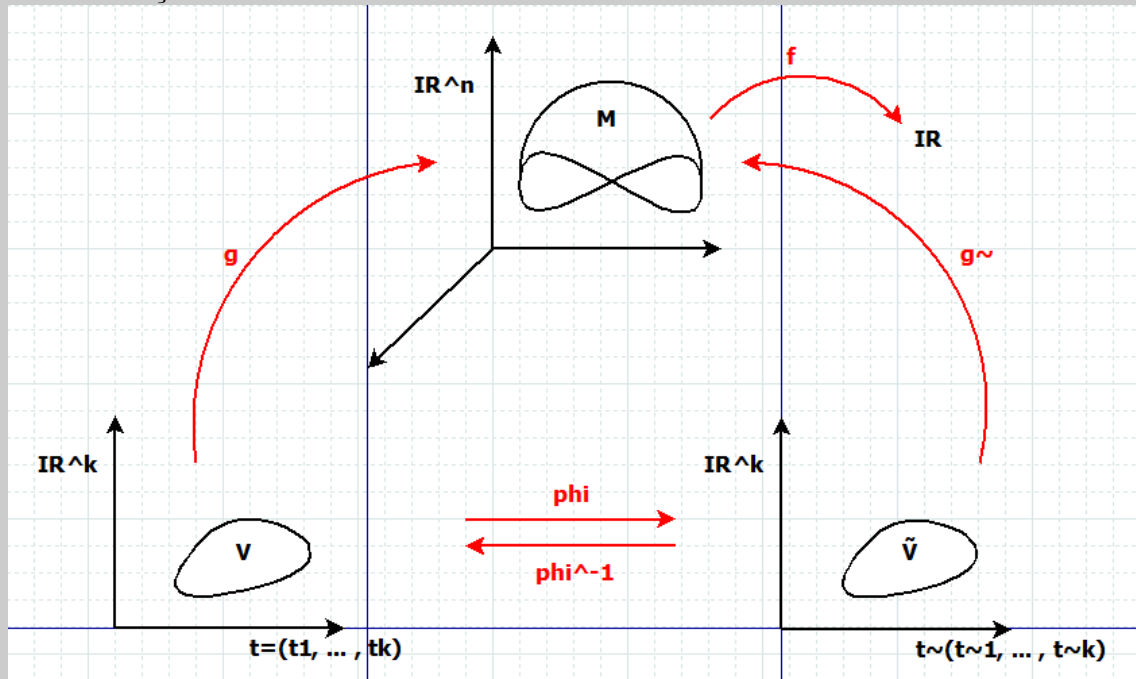
Definição 34.1. $M \subset \mathbb{R}^n$ vizinhança de coordenadas de uma variedade- k , $k < n$. $g : V \subset \mathbb{R}^k \rightarrow M$, uma parametrização, com $g(V) = M$. $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Define-se o integral de f em M por

$$\int_M f = \int_V f \circ g \sqrt{\det(Dg^T Dg)}$$

, caso exista. ■

Teorema 34.1. $\int_M f$ não depende da parametrização. ■

Demonstração.



$$\begin{aligned}\phi &= \tilde{g}^{-1} \circ g : V \longrightarrow \tilde{V} \\ \phi^{-1} &= g^{-1} \circ \tilde{g} : \tilde{V} \longrightarrow V\end{aligned}$$

Exercício: $\sqrt{\det(Dg^T Dg)} = |\det(D\phi)| \sqrt{\det(D\tilde{g}^T D\tilde{g})} \Rightarrow \int_V f \circ g \sqrt{\det(Dg^T Dg)} = \int_{\tilde{V}} f \circ \tilde{g} \sqrt{\det(D\tilde{g}^T D\tilde{g})}$ □

Aplicações:

1. $\text{Volume-}k(M) = \int_M 1;$
2. Se M tem densidade de massa $\alpha : M \longrightarrow \mathbb{R}$, a massa total de M é

$$\text{massa}(M) = \int_M \alpha$$

3. Centro de massa:

$$\bar{x}^j = \frac{1}{\text{massa}(M)} \int_M \alpha \cdot x^j$$

4. Centróide:

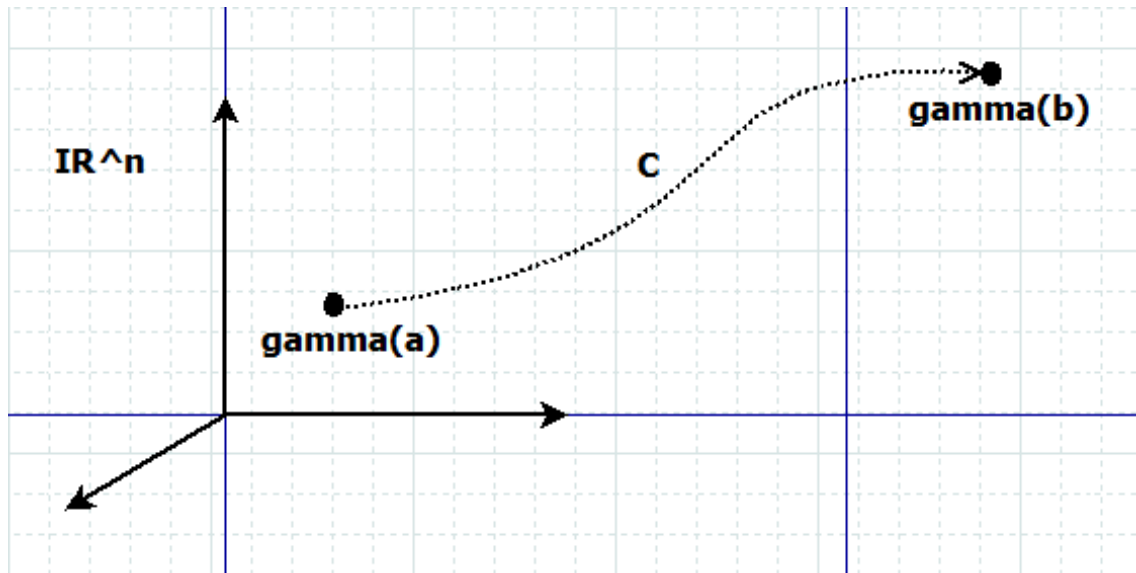
$$\bar{x}^j = \frac{1}{\text{volume}(M)} \int_M x^j$$

5. Momento de inércia:

$$I_L(M) = \int_M \alpha \cdot d_L^2$$

35 Aula de 30 de abril de 2014

Exemplo 35.1. Comprimento de um caminho (ou curva).



$$\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

γ é uma parametrização da variedade-1, C

$$D\gamma(t) = \begin{bmatrix} \gamma'_1(t) \\ \vdots \\ \gamma'_n(t) \end{bmatrix} \leftrightarrow \gamma'(t) = (\gamma'_1(t), \dots, \gamma'_n(t))$$

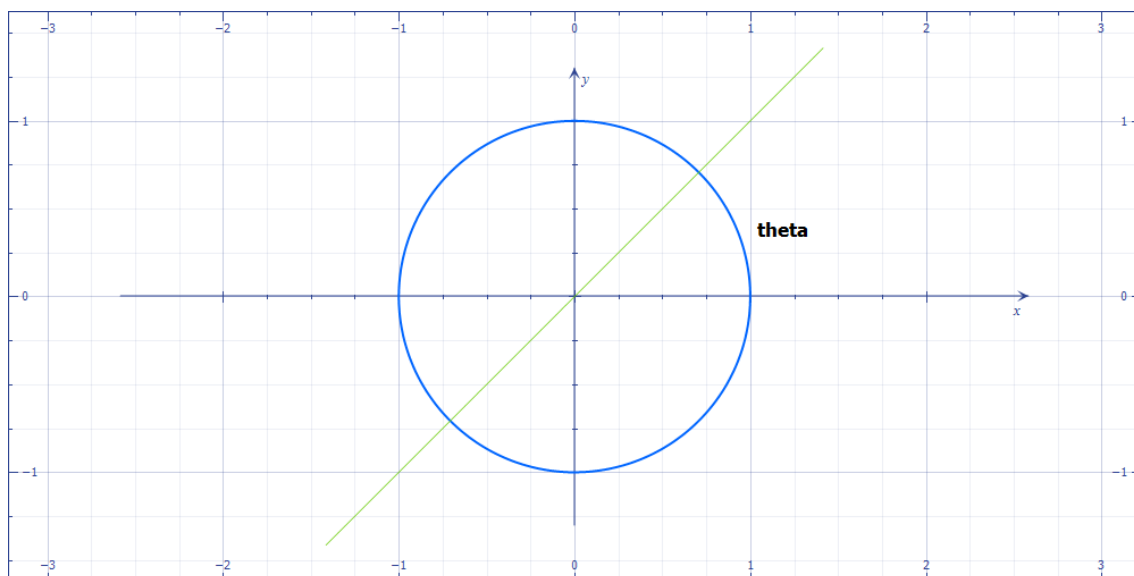
$$D\gamma^T D\gamma = \gamma'(t) \cdot \gamma'(t) = \|\gamma'(t)\|^2$$

$$\sqrt{\det(D\gamma^T D\gamma)} = \|\gamma'(t)\|$$

$$\text{Comprimento de } C = L_C = \int_a^b 1 \cdot \|\gamma'(t)\| dt$$

■

Exemplo 35.2. C circunferência de raio R , $x^2 + y^2 = R^2$



$$\gamma(\theta) = (R \cos \theta, R \sin \theta)$$

$$\theta \in]0, 2\pi[$$

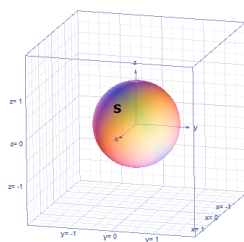
$$\gamma'(\theta) = (-R \sin \theta, R \cos \theta)$$

$$||\gamma'(\theta)|| = R$$

$$L_C = \int_C 1 = \int_0^{2\pi} 1 R d\theta = 2\pi R$$

■

Exemplo 35.3. Área da superfície esférica de raio R .



$$Area(S) = \int_S 1$$

$$g(\theta, \varphi) = (R \cos \theta \sin \varphi, R \sin \theta \sin \varphi, R \cos \varphi), \theta \in]0, 2\pi[, \varphi \in]0, \pi[$$

$$Dg(\theta, \varphi) = \begin{bmatrix} \left| \frac{\partial g}{\partial \theta} \right| & \left| \frac{\partial g}{\partial \varphi} \right| \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -R \sin \theta \sin \varphi & R \cos \theta \cos \varphi \\ R \cos \theta \sin \varphi & R \sin \theta \cos \varphi \\ 0 & -R \sin \varphi \end{bmatrix}$$

$$Dg^T Dg = \begin{bmatrix} \left\| \frac{\partial g}{\partial \theta} \right\|^2 & \frac{\partial g}{\partial \theta} \frac{\partial g}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial g}{\partial \theta} \frac{\partial g}{\partial \varphi} & \left\| \frac{\partial g}{\partial \varphi} \right\|^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R^2 \sin^2 \theta & 0 \\ 0 & R^2 \end{bmatrix}$$

$$\sqrt{\det(Dg^T Dg)} = \left\| \frac{\partial g}{\partial \theta} \times \frac{\partial g}{\partial \varphi} \right\| = R^2 \sin \varphi$$

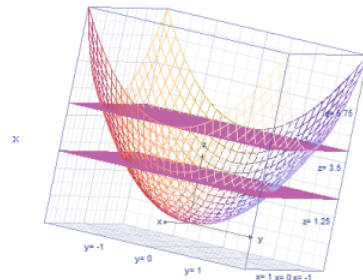
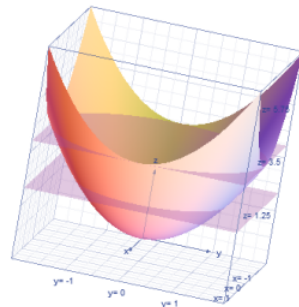
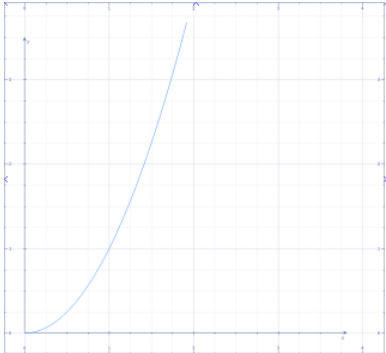
$$Area(S) = \int_S 1 = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} 1 R^2 \sin \varphi d\theta d\varphi = 2\pi R^2 \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi = 4\pi R^2$$

■

Exemplo 35.4. Seja M a superfície em $\mathbb{R}^3$ dada por:

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ 1 < x^2 + y^2 < 4 \end{cases}$$

, com densidade de massa (por unidade de área) $\alpha(x, y, z) = z$.



■

$$g(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, \rho^2), \rho \in]1, 2[, \theta \in]0, 2\pi[$$

$$Dg(\rho, \theta) = \begin{bmatrix} \left| \frac{\partial g}{\partial \rho} \right| & \left| \frac{\partial g}{\partial \theta} \right| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \\ 2\rho & 0 \end{bmatrix}$$

$$Dg^T Dg = \begin{bmatrix} \left\| \frac{\partial g}{\partial \rho} \right\|^2 & \frac{\partial g}{\partial \rho} \frac{\partial g}{\partial \theta} \\ \frac{\partial g}{\partial \rho} \frac{\partial g}{\partial \theta} & \left\| \frac{\partial g}{\partial \theta} \right\|^2 \end{bmatrix}$$

$$\sqrt{\det(Dg^T Dg)} = \left\| \frac{\partial g}{\partial \rho} \times \frac{\partial g}{\partial \theta} \right\| = \rho \sqrt{1 + 4\rho^2}$$

$$Area(M) = \int_M 1 = \int_1^2 \int_0^{2\pi} 1 \rho \sqrt{1 + 4\rho^2} d\theta d\rho = \dots$$

$$Massa(M) = \int_M \alpha = \int_1^2 \int_1^{2\pi} \underbrace{\rho^2}_{\alpha} \rho \sqrt{1 + 4\rho^2} d\theta d\rho = \dots$$

Coordenada z do centro de massa de M

$$\bar{z} = \frac{1}{massa(M)} \int_M z \alpha = \frac{1}{massa(M)} \int_1^2 \int_0^{2\pi} \underbrace{\rho^2}_z \underbrace{\rho^2}_{\alpha} \rho \sqrt{1 + 4\rho^2} d\theta d\rho = \dots$$

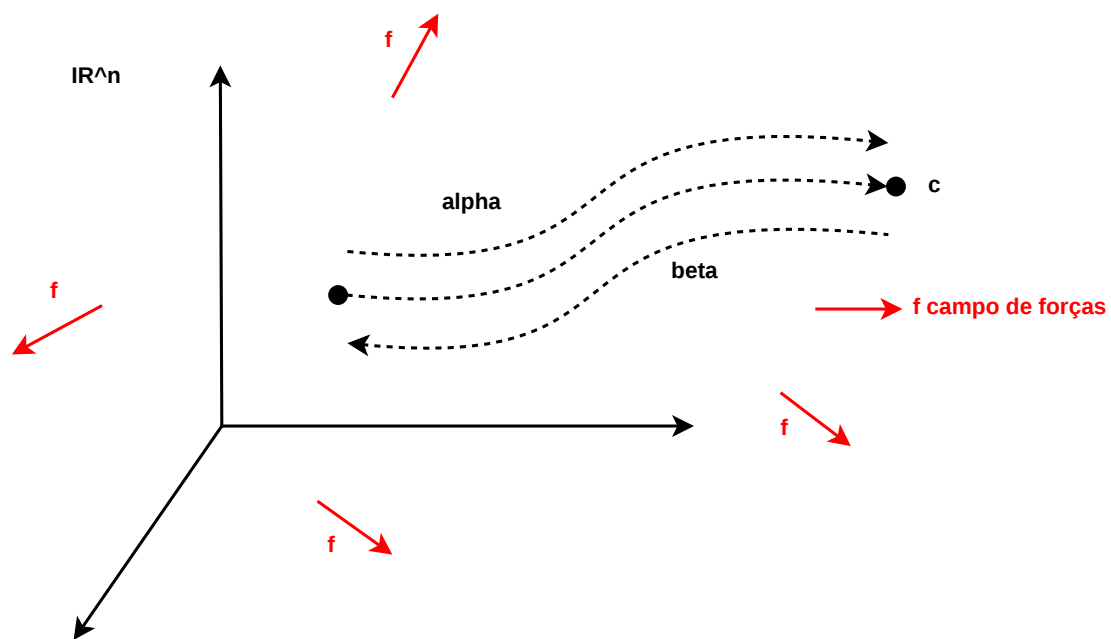
$$I_X(M) = \int_M \alpha d_X^2 = \int_1^2 \int_0^{2\pi} \underbrace{\rho^2}_{\alpha} \underbrace{(\rho^2 \sin^2 \theta + \rho^4)}_{y^2 + z^2 = d_X^2} \rho \sqrt{1 + 4\rho^2} d\theta d\rho = \dots$$

$$d_X(x, y, z) = \text{distância de } (x, y, z) \text{ ao eixo dos } xx = \sqrt{y^2 + z^2}.$$

Integrais de linha de campos vetoriais

($\Leftrightarrow$ trabalho de uma força)

Há grandezas, como o trabalho de uma força ao longo de uma curva, que são descritas por integrais que dependem da parametrização a menos de sinal.

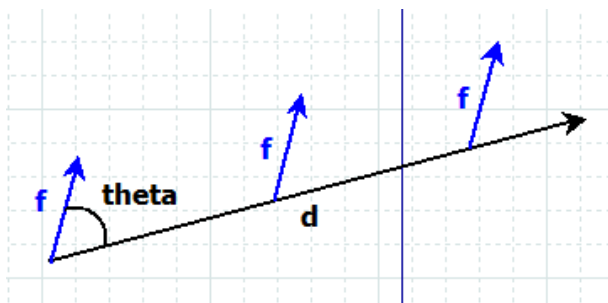


Trabalho de f ao longo de $\alpha = -$ trabalho de f ao longo de β .

$$\int f d\alpha = - \int f d\beta$$

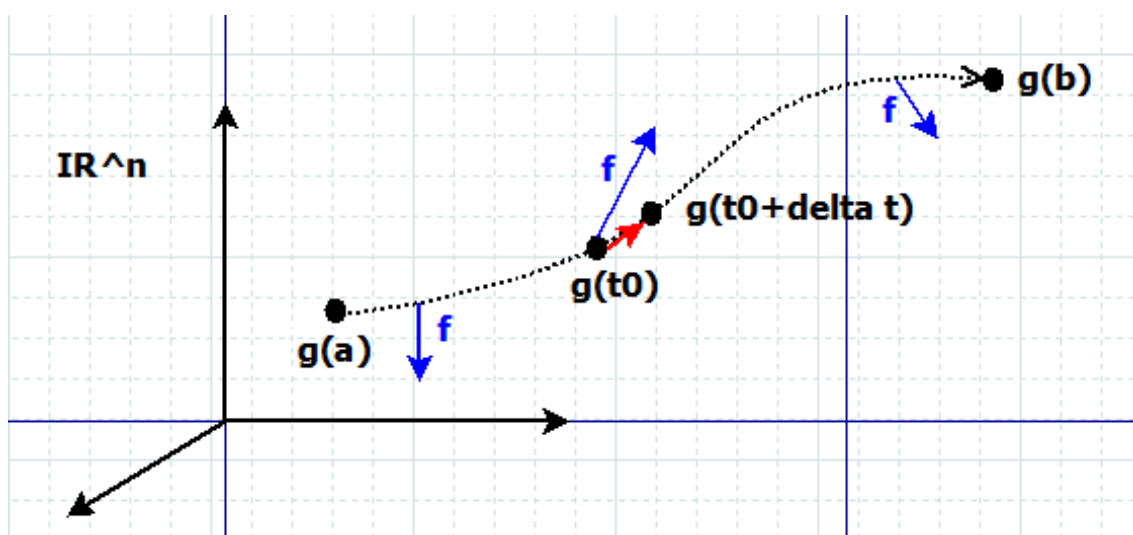
36 Aula de 2 de maio de 2014

f força constante.



$$\text{Trabalho} = f \cdot d = \|f\| \cdot \|d\| \cdot \cos \theta$$

$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ campo vetorial contínuo (força). C variedade-1.



$g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ parametrização de C .

Para Δt pequeno, o pedaço de curva C entre $g(t_0)$ e $g(t_0 + \Delta t)$ é bem aproximado pelo vetor $g'(t_0)\Delta t$.

Como f é contínuo, a contribuição deste troço de curva para o trabalho é aproximadamente

$$f(g(t_0)) \cdot g'(t_0)\Delta t$$

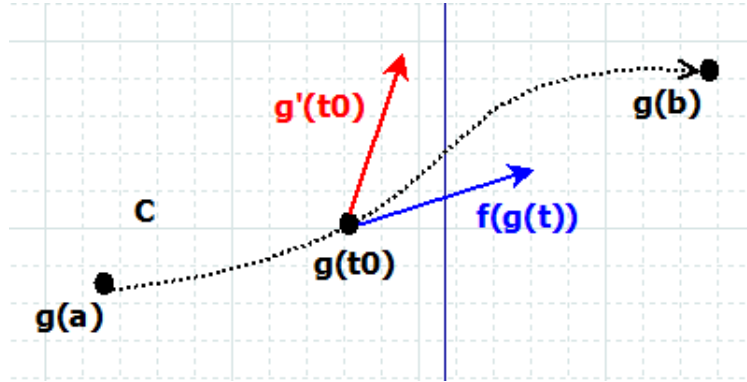
Deste modo:

Definição 36.1. Seja $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma parametrização de variedade-1, $C \subset \mathbb{R}^n$. Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo vetorial contínuo. Define-se o **integral de linha ao longo g** (= trabalho de f ao longo de g) por

$$\int f dg = \int_a^b f(g(t)) \cdot g'(t) dt$$

Nota 36.1.

1.



O trabalho será tanto maior ou menor consoante $f(g(t))$ e $g'(t)$ apontem ou não para o mesmo lado, *i.e.*, consoante $f(g(t)) \cdot g'(t)$ é maior ou menor. Em particular, se $f \perp C$ o trabalho é nulo.

2. Quando estamos a integrar um campo escalar sobre C , é o fator $\sqrt{\det(Dg^T Dg)} = \|g'(t)\|$ que aparece no $\int$ (integral) (e o $\int$ é igual para todas as parametrizações). Por contraste, aqui o que aparece no $\int$ é o próprio $g'(t)$.

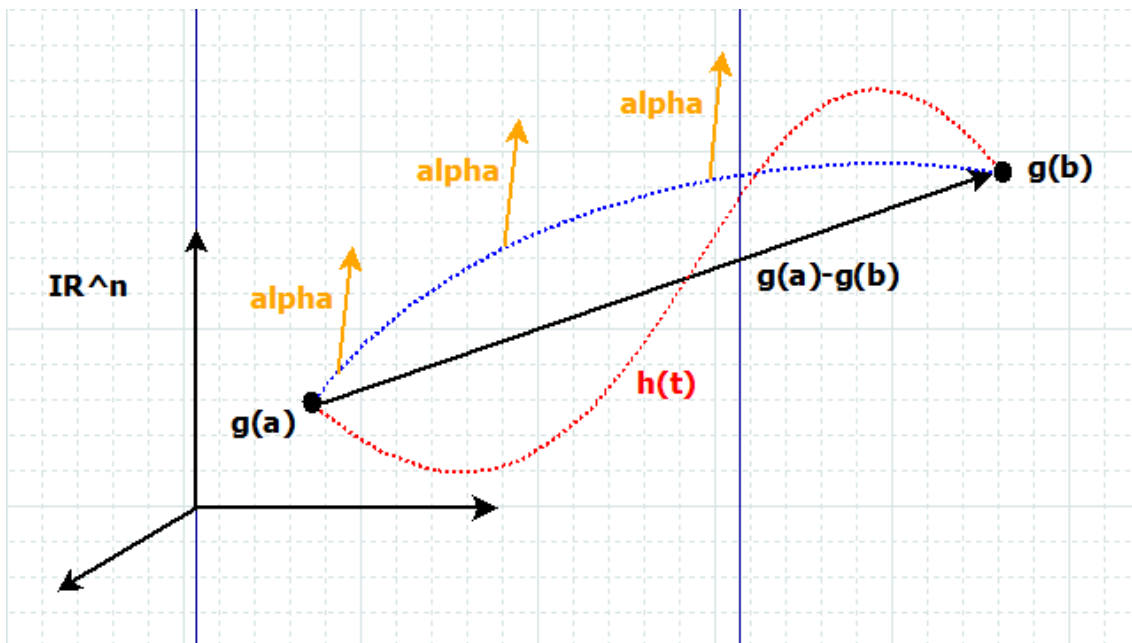
Teorema 36.1. Sejam α, β parametrizações da variável-1, $C \subset \mathbb{R}^n$, então

$$\int f d\alpha = \pm \int f d\beta$$

Com $+$ se α, β têm o mesmo sentido, e com $-$ se α, β têm sentidos opostos.

Exemplo 36.1.1. Trabalho de uma força constante

$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, com $f(x) = \alpha \in \mathbb{R}^n, \forall x \in \mathbb{R}^n$ constante.



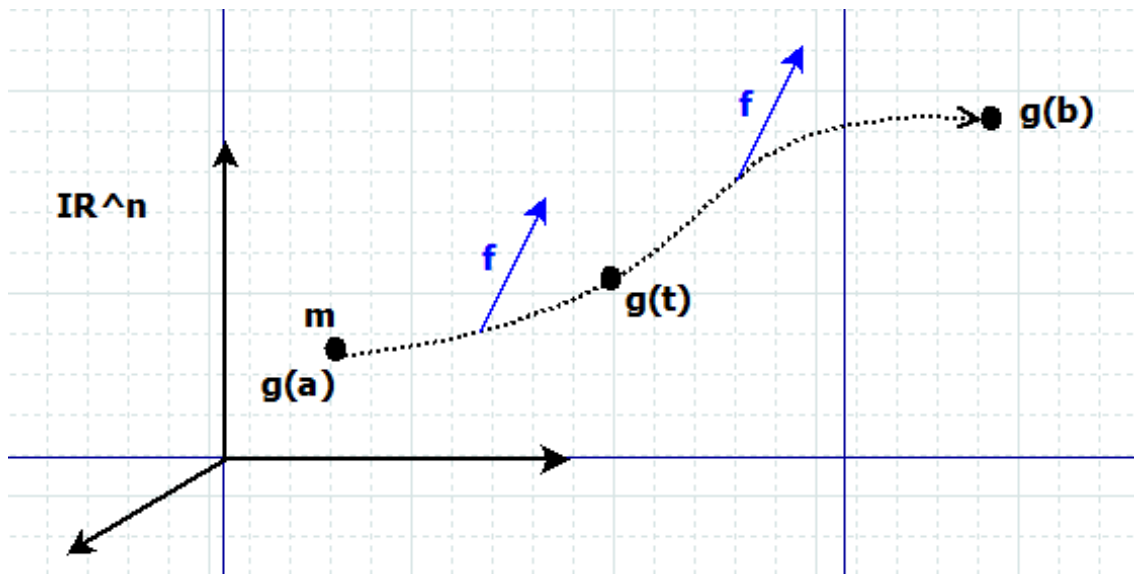
$g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ parametrização de C .

$$\begin{aligned}
 \int f dg &= \int_a^b f(g(t)) \cdot g'(t) dt = \\
 &= \int_a^b \alpha \cdot g'(t) dt = \\
 &= \int_a^b \sum_{j=1}^n \alpha_j \cdot g'_j(t) dt = \\
 &= \sum_{j=1}^n \alpha_j \int_a^b g'_j(t) dt = \\
 &= \sum_{j=1}^n \alpha_j (g(b) - g(a)) = \\
 &= \alpha \cdot (\text{deslocamento})
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ As forças constantes são conservativas. ■

Definição 36.2. Um campo vetorial em $\mathbb{R}^n$ diz-se conservativo se $\forall P_1, P_2 \in \mathbb{R}^n$ os trabalhos ao longo de todos os caminhos que ligam P_1 a P_2 são iguais. ■

Exemplo 36.2.1. Conservação da Energia Mecânica



$$g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

Uma bola de massa m percorre a trajetória $g(t)$ sob influência da força f .

$$\begin{aligned} \text{Posição}(t) &= g(t) \\ \text{Velocidade}(t) &= g'(t) \\ \text{Aceleração}(t) &= g''(t) \\ \text{Lei de Newton: } f &= ma \\ f(g(t)) &= mg''(t) \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|g'(t)\|^2 &= \frac{d}{dt} (g'(t) \cdot g'(t)) = \\ &= g''(t) \cdot g'(t) + g'(t) \cdot g''(t) = \\ &= 2g''(t) \cdot g'(t) \end{aligned}$$

Trabalho de f

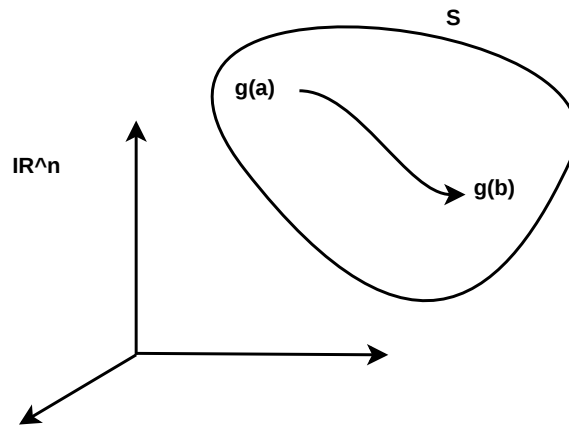
$$\begin{aligned} \int f dg &= \int_a^b f(g(t)) \cdot g'(t) dt = \\ &= \int_a^b g''(t) \cdot g'(t) dt = \\ &= \frac{m}{2} \int_a^b \frac{d}{dt} \|g'(t)\|^2 dt = \\ &= \frac{m}{2} \|g'(b)\|^2 - \frac{m}{2} \|g'(a)\|^2 = \\ &= k(b) - k(a) \end{aligned}$$

k é a energia cinética.



37 Aula de 5 de maio de 2014

$\phi : S \longrightarrow \mathbb{R}$ campo escalar de classe C^1



$g : [a, b] \longrightarrow S$ caminho em S .

$$\frac{d}{dt}(\phi \circ g)(t) = \nabla \phi(g(t)) \circ g'(t)$$

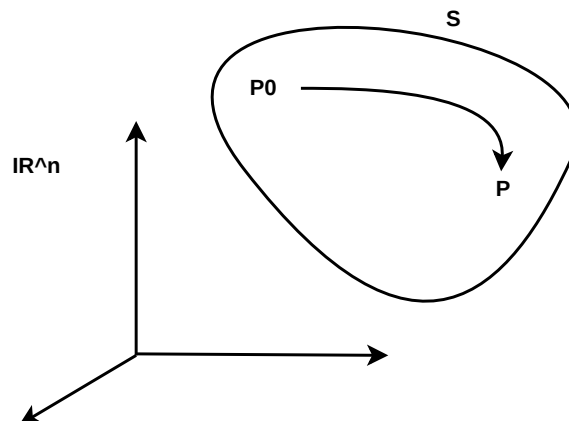
Trabalho de $\nabla \phi$ ao longo de g :

$$\begin{aligned} \int_a^b \nabla \phi(g(t)) \circ g'(t) &= \int_a^b \frac{d}{dt}(\phi \circ g) dt = \\ &= \phi(g(b)) - \phi(g(a)) = \\ &= \phi(\text{pto final}) - \phi(\text{pto inicial}) \end{aligned}$$

$$\int \nabla \phi dg = \phi(g(b)) - \phi(g(a))$$

Logo, $\int \nabla \phi dg$ só depende do ponto inicial e do ponto final $\Rightarrow \nabla \phi$ é conservativo.

Seja agora, $S \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $f : S \longrightarrow \mathbb{R}^n$ campo vetorial contínuo, conservativo.



Seja $\phi : S \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $\phi(P) = \int_{P_0}^P f = \text{trabalho de } f \text{ ao longo de um caminho}$

que ligue P_0 a P .

ϕ está bem definido porque f é conservativo e o trabalho não depende do caminho seguido entre P_0 e P .

Facto 37.1. $\nabla\phi = f \Rightarrow$ as forças conservativas são gradientes. ■

Teorema 37.1 (Teorema fundamental do cálculo para integrais de linha). $S \subset \mathbb{R}^n$ aberto. $f : S \rightarrow \mathbb{R}^n$ campo vetorial contínuo. f é conservativo em S , ou seja, sse $\exists Q : S \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 tal que $f = \nabla Q$ em S .

Além disso,

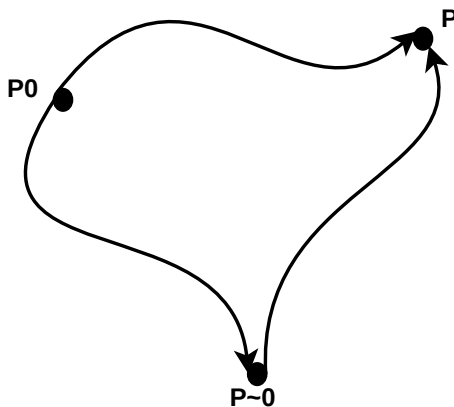
$$\int \nabla Q dg = Q(g(b)) - Q(g(a)), g : [a, b] \rightarrow S$$

Se $f = \nabla Q$ em S , Q diz-se um potencial para f em S .

Se $\tilde{Q}$ é outro potencial para f em S , então $\tilde{Q} = Q + \text{constante}$:

$$\begin{aligned} \nabla \tilde{Q} = f, \nabla Q = f &\Rightarrow \nabla(\tilde{Q} - Q) = \nabla \tilde{Q} - \nabla Q = \\ &= f - f = 0 \Rightarrow \tilde{Q} - Q = \text{constante} \Leftrightarrow \tilde{Q} = Q + \text{constante} \end{aligned}$$

A constante $\tilde{Q} - Q$ pode entender-se através da escolha de “ponto base” P_0 :



$$Q(P) = \int_{P_0}^P f, \tilde{Q}(P) = \int_{\tilde{P}_0}^P f$$

$$Q(P) = \tilde{Q}(P) + \underbrace{\int_{P_0}^{\tilde{P}_0} f}_{\text{constante}}$$

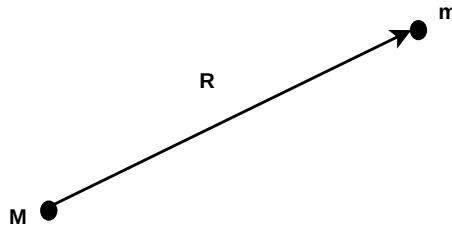
Exemplo 37.1. $Q : \mathbb{R}^3 \setminus \{0, 0, 0\} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$Q(x, y, z) = R^n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = nR^{n-2}x, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = nR^{n-2}y, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = nR^{n-2}z$$

$\nabla Q = nR^{n-2}(x, y, z)$ é conservativo. ■

Exemplo 37.2. Potencial gravítico de Newton



$$f_N = -GMm \frac{\vec{R}}{R^3}$$

$$\vec{R} = (x, y, z), \quad R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

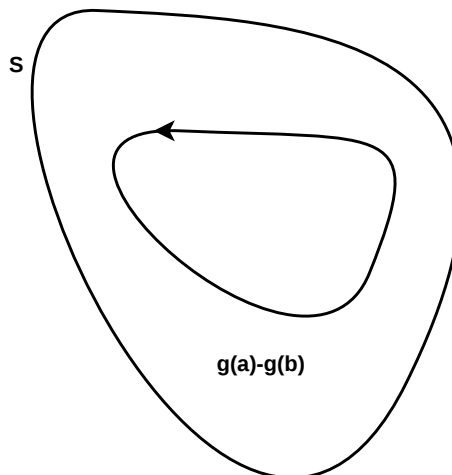
$$f_N = \nabla Q_N; \quad Q_N = \frac{GMm}{R}$$

caso $n = 1$ do exemplo anterior.

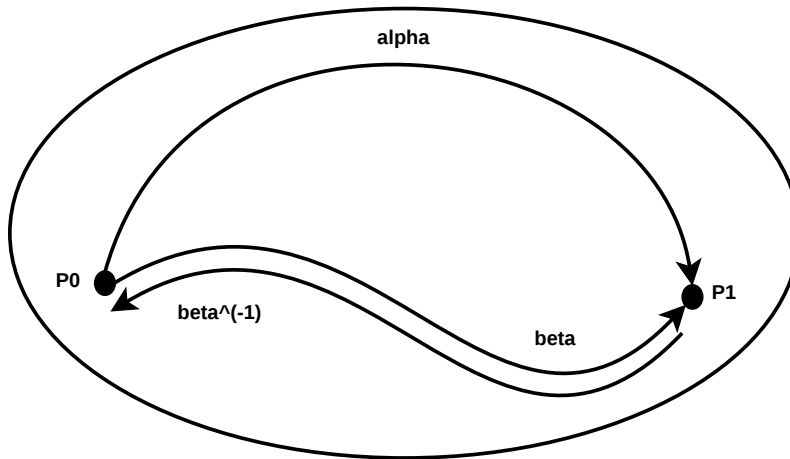
A força gravítica de Newton é conservativa. ■

Seja agora, $S \subset \mathbb{R}^n$ aberto.

$g : [a, b] \longrightarrow S$ caminho fechado em S , ou seja $g(a) = g(b)$.



$$f : S \longrightarrow \mathbb{R}^n \text{ conservativo} \Rightarrow f = \nabla Q \text{ em } S \text{ e } \int \nabla Q dg = Q(g(b)) - Q(g(a)) = 0.$$



β^{-1} é o caminho β percorrido em sentido oposto. $\Rightarrow \beta^{-1}$ após α é um caminho fechado.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int f d\alpha + \int f d\beta^{-1} = 0 &\Leftrightarrow \int f d\alpha - \int f d\beta = 0 \Leftrightarrow \\ &\int f d\alpha = \int f d\beta \\ &\Downarrow \\ &f \text{ é conservativa} \end{aligned}$$

Teorema 37.2. $S \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $f : S \rightarrow \mathbb{R}^n$ campo vetorial contínuo. f é conservativo em S ($\Leftrightarrow f$ é gradiente em S) sse o trabalho de f ao longo de todo e qualquer caminho fechado em S é nulo. ■

$S \subset \mathbb{R}^n$ aberto.

$f : S \rightarrow \mathbb{R}^n$ campo vetorial conservativo de classe $C^1 \Rightarrow f = \nabla Q$, Q de classe C^2 .

Então, $\frac{\partial^2 Q}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 Q}{\partial x_j \partial x_i}$

$$f = \nabla Q \Leftrightarrow f_j = \frac{\partial Q}{\partial x_j}$$

Logo $\frac{\partial f_j}{\partial x_i} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, \forall i, j = 1, \dots, n$

Definição 37.1. Um campo vetorial de classe C^1 , $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ diz-se fechado se

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}, \forall i, j = 1, \dots, n$$

■

Teorema 37.3. $S \subset \mathbb{R}^n$ aberto; $f : S \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 . Se f é conservativo em S então é fechado em S . ■

38 Aula de 7 de maio de 2014

Quando $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é fechado, i.e. $g(a) = g(b)$, é costume escrever-se $\oint f dg$ para $\int f dg$.

Existem campos vetoriais fechados que não são conservativos.

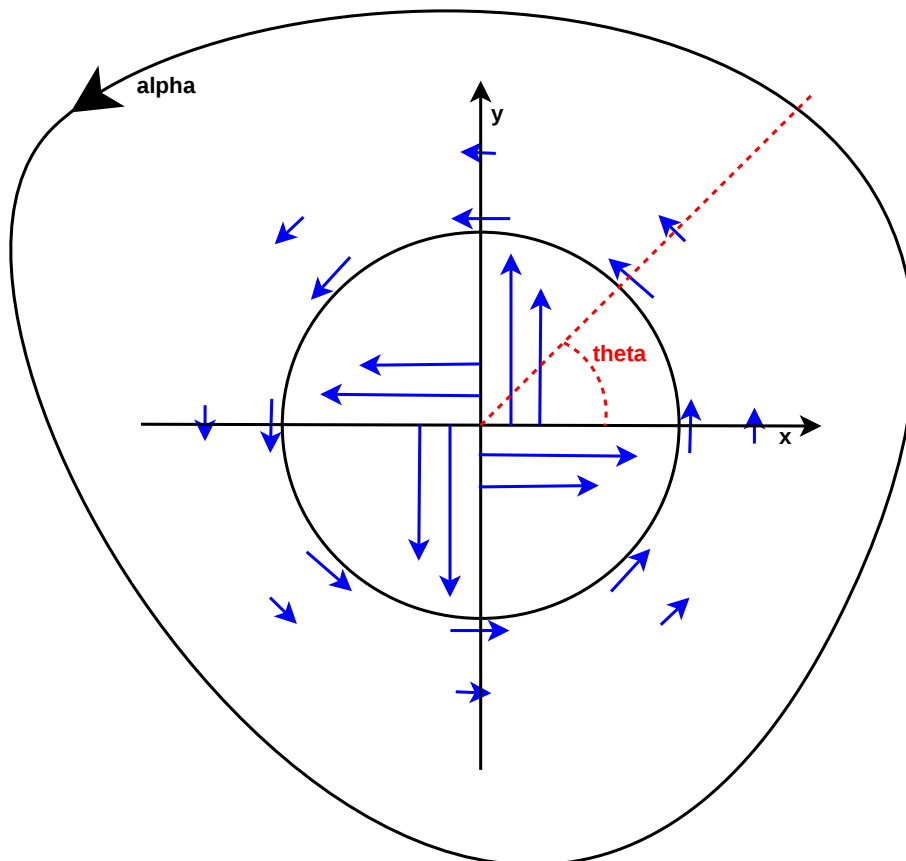
Exemplo 38.1. “Ralo da banheira”

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$f(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

Será que f é conservativo no seu domínio? **Não!**

$$f \text{ é fechado: } \frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$



Como f é tangente à circunferência C ,

$$\oint_C f > 0$$

$\Rightarrow f$ não é conservativo no seu domínio.

Cálculo do trabalho de f ao longo de C :

$$\left(\oint_C f \right)$$

C raio R_0 ; parametrização: $g(\theta) = (R_0 \cos(\theta), R_0 \sin(\theta)), \theta \in [0, 2\pi] \Rightarrow g'(\theta) = (-R_0 \sin(\theta), R_0 \cos(\theta))$.

$$\oint_C f g d = \int_0^{2\pi} \left(\frac{-R_0 \sin(\theta)}{R_0^2}, \frac{R_0 \cos(\theta)}{R_0^2} \right) \cdot (-R_0 \sin(\theta), R_0 \cos(\theta)) d\theta = \int_0^{2\pi} 1 d\theta = 2\pi \neq 0$$

Nota 38.1. $\oint_C f$ não depende do raio R_0 ■

Facto 38.1. (a compreender posteriormente): $\oint f d\alpha = 2\pi$ ■

O que acontece se tentarmos calcular o potencial para f ?

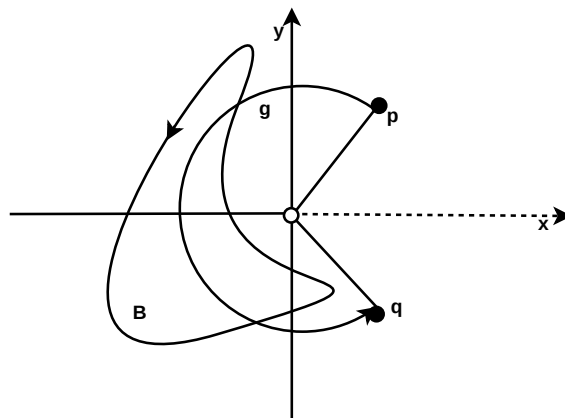
$$f = \nabla \varphi \Leftrightarrow \begin{cases} f_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{-y}{x^2 + y^2} \\ f_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2} \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$\varphi(x, y) = \arctg \frac{y}{x} + \text{constante} = \theta(x, y) + \text{constante}$$

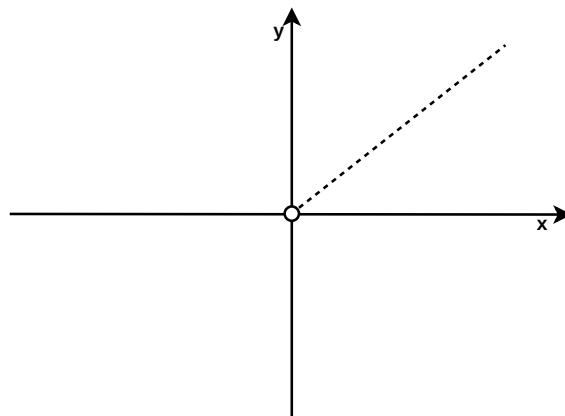
A função $\theta(x, y)$ não é de classe C^1 em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ porque é descontínua no semi-eixo $\begin{cases} y = 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$, logo f não é conservativa no seu domínio $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

No entanto $\theta(x, y)$ é de classe C^1 em $\mathbb{R} \setminus \begin{cases} y = 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$ e f é conservativa nessa região.



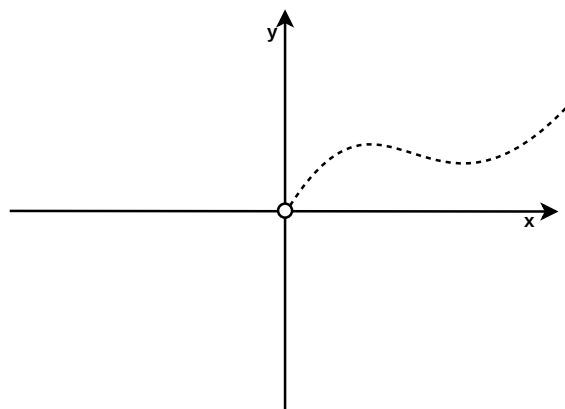
$$\oint f d\beta = 0; \int f dg = \theta(q) - \theta(p)$$

Em



f é conservativo.

Como veremos, numa região da forma

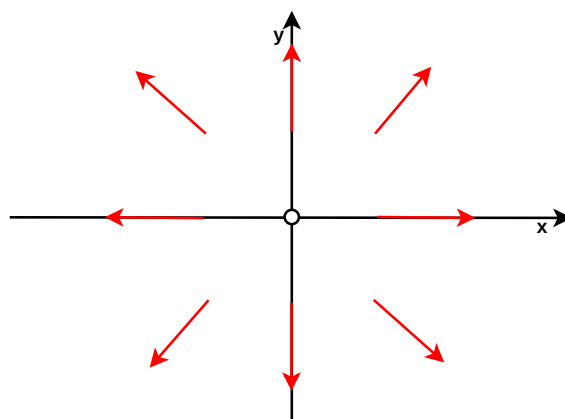


f é conservativo.



Exemplo 38.2. $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$f(x, y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$$



f é radial, $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x, y)$

$$\oint_C f = 0, f \perp C$$

f é fechado: $\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{-xy}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$.

f será conservativo no seu domínio?

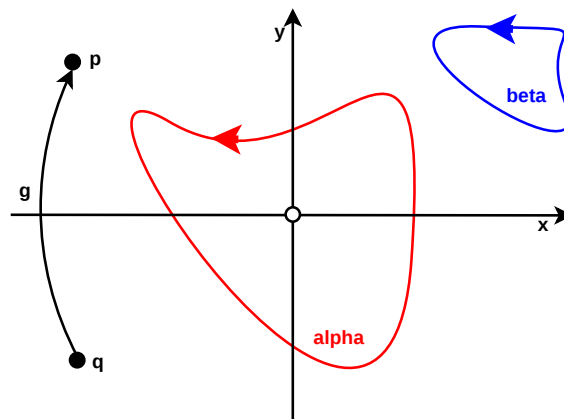
$$f = \nabla \varphi \Leftrightarrow \begin{cases} f_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ f_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases}$$

1ª equação: $\varphi(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + a(y)$

Substituindo na 2ª equação temos: $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + a'(y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \Rightarrow a$ é

constante.

$\varphi(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + \text{constante}$, é de classe C^1 em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$; Logo f é conservativo no seu domínio.



$$\oint f d\alpha = \oint f d\beta = 0$$

$$\int f g d = \varphi(q) - \varphi(p)$$

■

39 Aula de 8 de maio de 2014

$S \subset \mathbb{R}^n$ aberto.

$f : S \rightarrow \mathbb{R}^n$ classe C^1 .

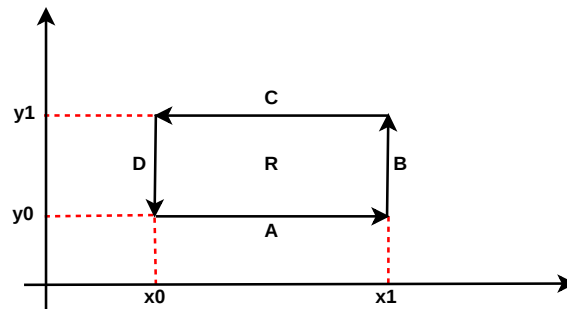
f conservativo em $S \Leftrightarrow f$ é fechado em S

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}, \forall i, j = 1, \dots, n \right)$$

Teorema de Green no plano

Retângulo $R \subset \mathbb{R}^2$ dado por

$$\begin{cases} x_0 \leq x \leq x_1 \\ y_0 \leq y \leq y_1 \end{cases}$$



$$\partial R = A \cup B \cup C \cup D$$

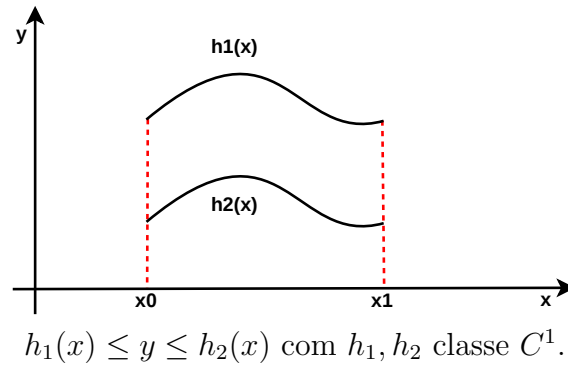
Seja $f = (f_1, f_2)$ de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} \oint_{\partial R} f &= \int_A f + \int_B f + \int_C f + \int_D f = \\ &= \int_{x_0}^{x_1} f_1(x, y_0) dx + \int_{y_0}^{y_1} f_2(x_1, y) dy - \int_{x_0}^{x_1} f_1(x, y_1) dx - \int_{y_0}^{y_1} f_2(x_0, y) dy = \\ &= \int_{x_0}^{x_1} [f_1(x, y_0) - f_1(x, y_1)] dx + \int_{y_0}^{y_1} [f_2(x_1, y) - f_2(x_0, y)] dy = \\ &= - \int_{x_0}^{x_1} \left[\int_{y_0}^{y_1} \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) dy \right] dx + \int_{y_0}^{y_1} \left[\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) dx \right] dy = \\ &= \iint_R \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dx dy \end{aligned}$$

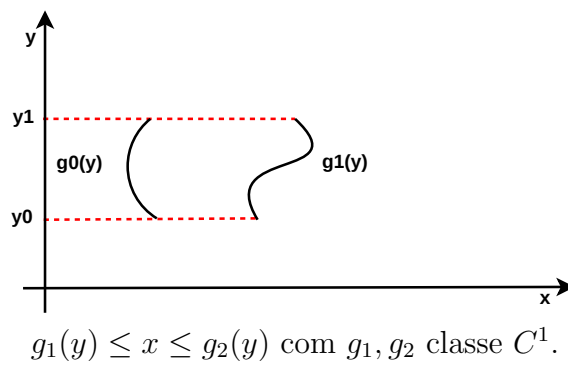
$$\oint_{\partial R} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dx dy$$

O resultado também é válido para regiões limitadas por gráficos.

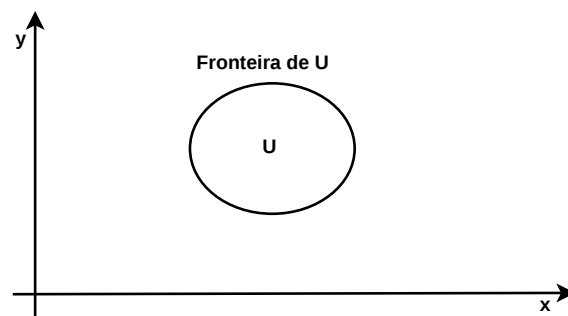
Uma região em $\mathbb{R}^2$ diz-se y -simples se é da forma:



Uma região em $\mathbb{R}^2$ diz-se x -simples se é da forma:



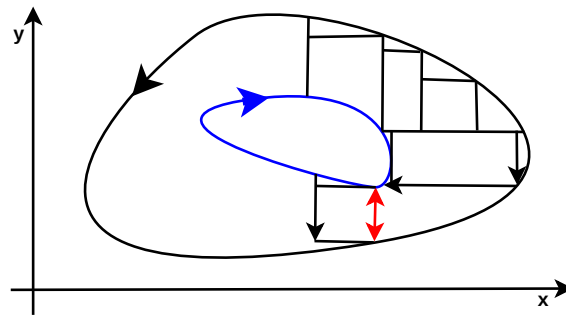
O resultado acima é válido para uma região que seja simultaneamente x -simples e y -simples.



$$\oint_{\partial U} f = \iint_U \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dx dy$$

Uma região $D \subset \mathbb{R}^2$ diz-se simples se puder ser decomposta numa união finita de regiões simultaneamente x -simples e y -simples.

$$D \subset \mathbb{R}^2, \partial D = \alpha \cup \beta$$



Aplicando o resultado de cima a sub-regiões de D simultaneamente x -simples e y -simples observamos que a contribuição para o trabalho das arestas internas é nula.

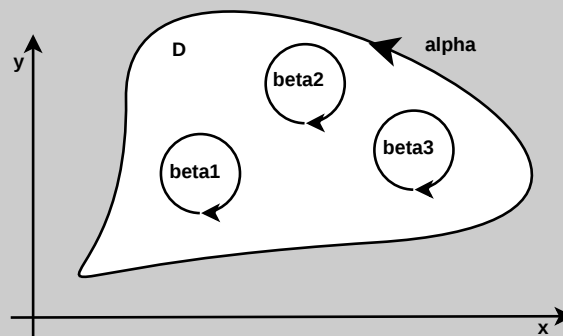
Logo:

$$\oint f d\alpha + \oint f d\beta = \oint_{\partial D} f = \iint_D \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dx dy$$

Teorema 39.1 (Green no plano). Seja $D \subset \mathbb{R}^2$ uma região simples limitada exteriormente pela curva fechada α e interiormente pelas curvas fechadas $\beta_1, \beta_2, \beta_3$; $\partial D = \alpha \cup \beta_1 \cup \beta_2 \cup \beta_3$.

Orientemos α no sentido anti-horário e $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ no sentido horário.

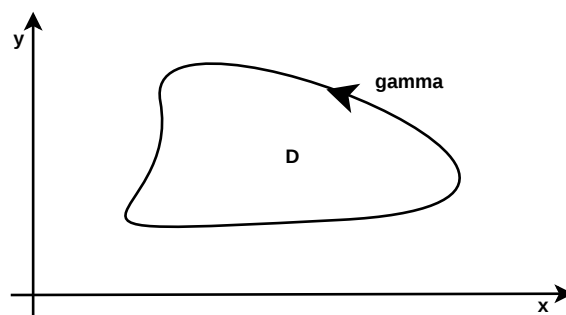
Seja f um campo vetorial de classe C^1 em D .



$$\iint_D (\partial_1 f_2 - \partial_2 f_1) dx dy = \oint f \cdots$$



Exemplo 39.1.1.



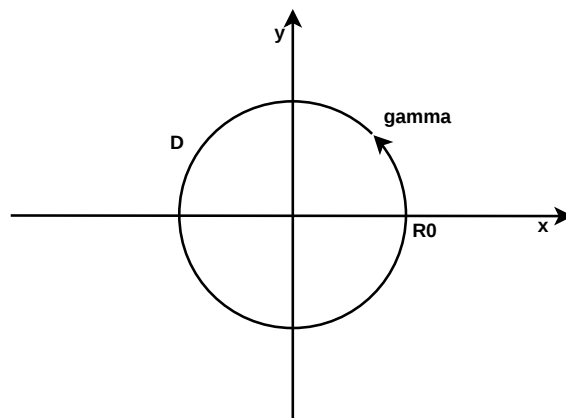
$\partial D = \gamma; f(x, y) = \left(\frac{-y}{2}, \frac{x}{2}\right)$, classe C^1 em $\mathbb{R}^2$.

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 1$$

$$Area(D) = \iint_D 1 dx dy = \iint_D \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right) dx dy = \oint f d\gamma$$

■

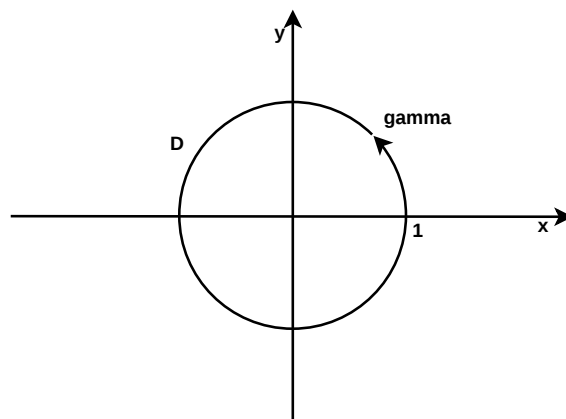
Exemplo 39.1.2.



$$\gamma(\theta) = (R_0 \cos(\theta), R_0 \sin(\theta)), \theta \in [0, 2\pi] \Rightarrow \gamma'(\theta) = (-R_0 \sin(\theta), R_0 \cos(\theta))$$

$$\begin{aligned} \oint f d\gamma &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{-R_0 \sin(\theta)}{2}, \frac{R_0 \cos(\theta)}{2} \right) \cdot (-R_0 \sin(\theta), R_0 \cos(\theta)) d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{R_0^2}{2} d\theta = \pi R_0^2 = Area(D) \end{aligned}$$

■



$$f(x, y) = (\arctan^3 x^2 + x^7 + 2y, \cos^2 y^3 + e^{y^2} - 3x)$$

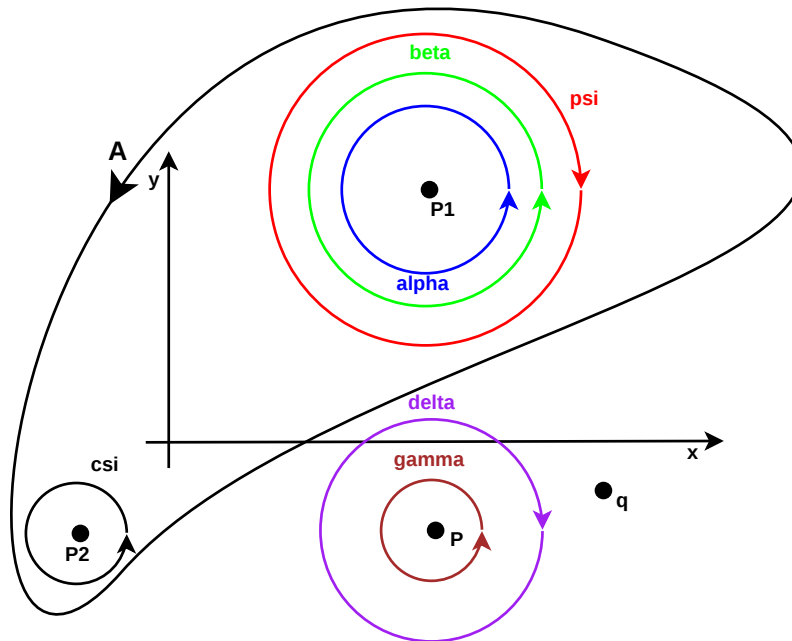
$$\oint f d\gamma = ?$$

$$\begin{aligned}\oint f d\gamma &= \iint_D \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D (-3 - 2) dx dy = \\ &= \iint_D (-5) = -5 \times \text{Area}(D) = -5\pi\end{aligned}$$

40 Aula de 9 de maio de 2014

Definição 40.1. $S \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Dois caminhos fechados contidos em S , α e β , dizem-se homotópicos entre si em S , se for possível deformar continuamente um no outro, preservando os sentidos, sem sair de S . ■

Exemplo 40.1.1. $\mathbb{R}^2 \setminus \{P_1, P_2\}$ $\alpha \sim \beta$ (α é homotópico a β)



$$\alpha \not\sim \gamma$$

$\gamma \sim 1\text{ ponto}$ (1 ponto é o caminho constante com velocidade zero.)

$$p \sim q, \gamma \sim q$$

$$\delta \sim q, q \sim \gamma \Rightarrow \delta \sim \gamma$$

$$\alpha \not\sim 1\text{ ponto} \Rightarrow \alpha \not\sim \psi \text{ (devido aos sentidos)}$$

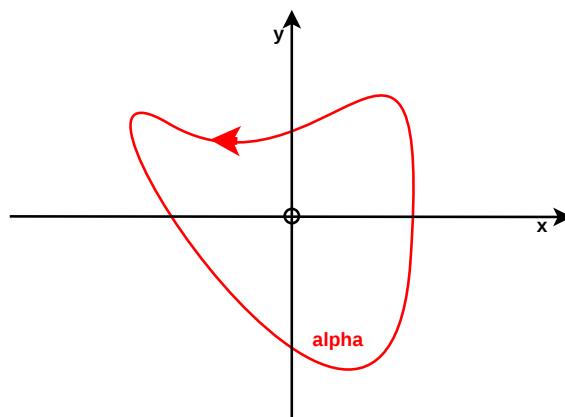
$$\alpha \not\sim \xi, \xi \not\sim 1\text{ ponto}, A \not\sim \alpha$$

■

Definição 40.2. $S \subset \mathbb{R}^n$ aberto em S diz-se simplesmente conexo se qualquer caminho fechado contido em S é homotópico a 1 ponto, em S ■

Exemplo 40.2.1. $\mathbb{R}^n$ é simplesmente conexo. ■

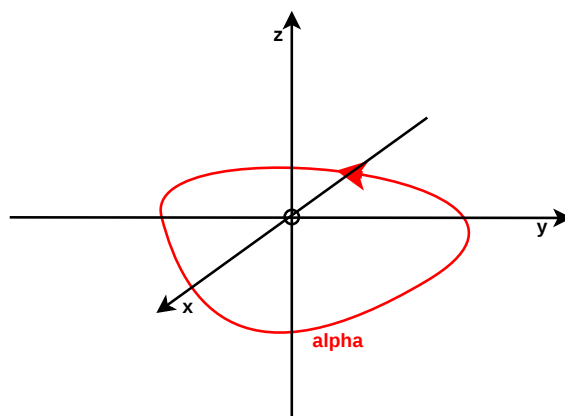
Exemplo 40.2.2. $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ não é simplesmente conexo.



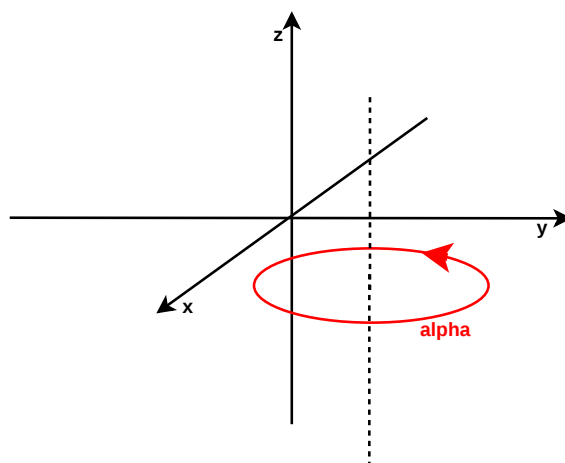
$\alpha \not\sim 1\text{ponto}$



Exemplo 40.2.3. $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ é simplesmente conexo.



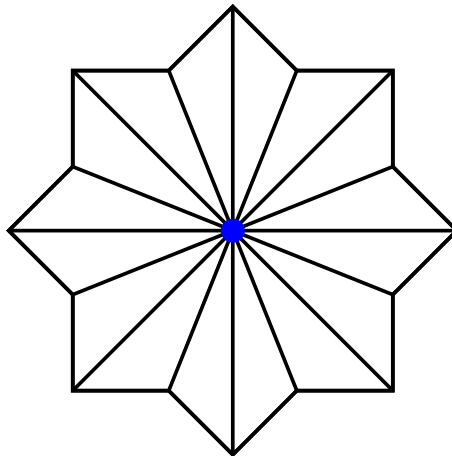
Exemplo 40.2.4. $\mathbb{R}^3 \setminus 1\text{eixo}$ não é simplesmente conexo.



$\alpha \not\sim 1\text{ponto}$

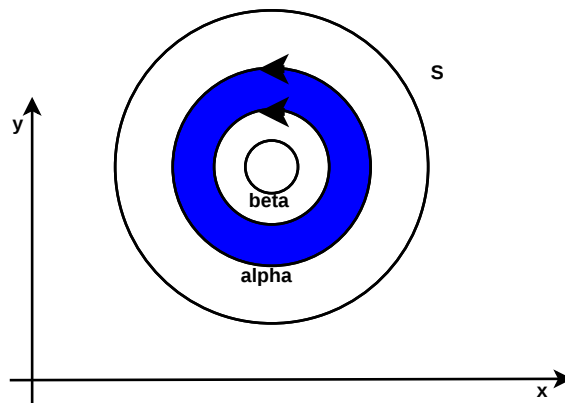
■

Exemplo 40.2.5. Um conjunto em estrela é simplesmente conexo.



■

Seja agora, $S \subset \mathbb{R}^2$ aberto, $f : S \longrightarrow \mathbb{R}^n$ classe C^1 fechado i.e. $\frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial y}$.
 α, β caminhos fechados em S , homotópicos em S .



$$\alpha - \beta$$

$$D \subset S, \partial D = \alpha \cup \beta$$

Pelo Teorema de Green

$$\begin{aligned}
& \iint_S \left(\underbrace{\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}}_{=0} \right) dx dy = 0 \\
& \Downarrow (T.Green) \\
& \oint_{\partial D} f = \oint f d\alpha - \oint f d\beta = 0 \\
& \Downarrow \\
& \oint f d\alpha = \oint f d\beta
\end{aligned}$$

Logo, em $S \subset \mathbb{R}^2$, se $\alpha \sim \beta$ em S e f é fechado em S então

$$\oint f d\alpha = \oint f d\beta$$

Em $\mathbb{R}^3$, o mesmo resultado é válido, graças ao teorema de Stokes, que será abordado mais adiante nestes apontamentos.

Em $\mathbb{R}^n$, o mesmo resultado é válido graças ao teorema de Stokes generalizado (que não faz parte do programa de CDI-II).

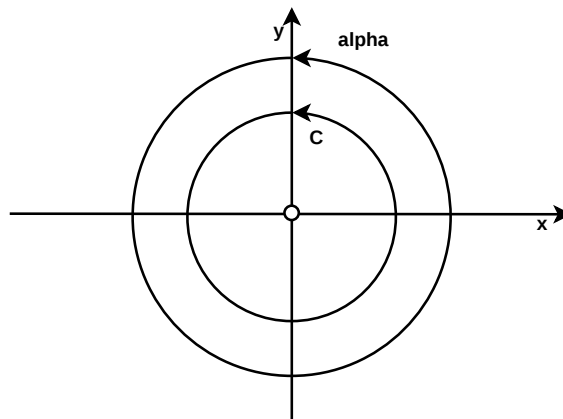
Teorema 40.1. $S \subset \mathbb{R}^n$ aberto: $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ classe C^1 , fechado. Se α, β são caminhos fechados contidos em S e homotópicos entre si em S então:

$$\oint f d\alpha = \oint f d\beta$$

■

Exemplo 40.1.1. Ralo da banheira

$f(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$ em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
 f é fechado.



$$\oint_C f = 2\pi$$

$$\alpha \sim C$$

$$\Downarrow$$

$$\oint f d\alpha = \oint_C f = 2\pi$$

■

Teorema 40.2. $S \subset \mathbb{R}^n$ aberto.

$f : S \rightarrow \mathbb{R}^n$ classe C^1 , fechado se α é um caminho fechado em S homotópico a 1 ponto, em S , então

$$\oint f d\alpha = 0$$

■

Teorema 40.3. $S \subset \mathbb{R}^n$ aberto e simplesmente conexo. $f : S \rightarrow \mathbb{R}^n$ classe C^1 . f é conservativo em S sse f é fechado.

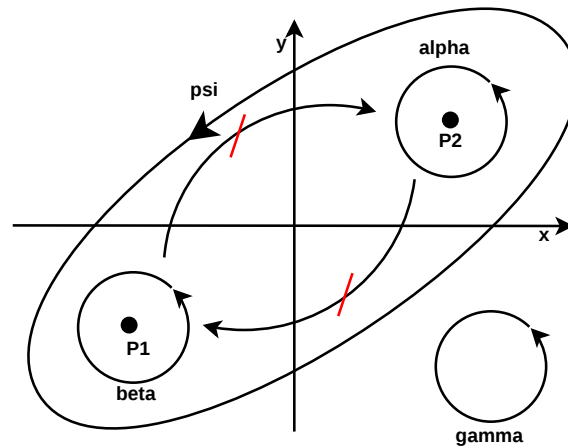
■

Demonstração. $\Rightarrow$ já é conhecida; $\Leftarrow \alpha \sim 1 \text{ ponto} \Rightarrow \oint f d\alpha = 0$

□

Exemplo 40.3.1. $S = \mathbb{R}^2 \setminus \{P_1, P_2\}$

$f : S \rightarrow \mathbb{R}^n$ fechado



$$\oint f d\gamma = 0$$

f é conservativo em S sse $\oint f d\alpha = 0$ e $\oint f d\beta = 0$

■

Nota 40.1. $\oint f d\psi = \oint f d\alpha + \oint f d\beta$

■

41 Aula de 12 de maio de 2014

Exemplo 41.1. $f(x, y) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right)$

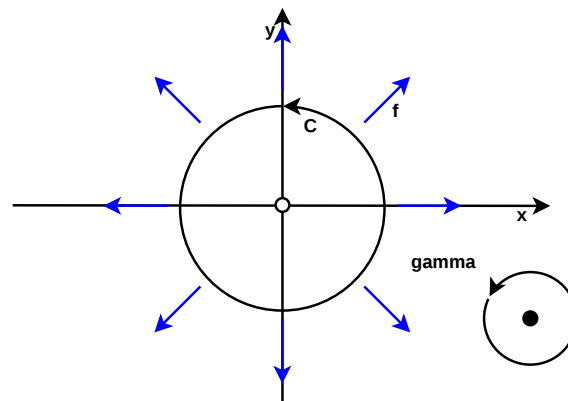
$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$

f conservativo no seu domínio?

f é radial, $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2} = h(R)\vec{R}$

$R = \sqrt{x^2 + y^2}, \vec{R} = (x, y) \Rightarrow f$ é fechado:

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial f_1}{\partial y}$$



$$\gamma \sim 1 \text{ ponto} \Rightarrow \oint f d\gamma = 0$$

$$f \perp C \Rightarrow \oint_C f = 0$$

$$\Rightarrow \oint f d\alpha = 0, \forall \text{ caminhos fechados em } \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \Rightarrow \underline{f \text{ é conservativo.}}$$

outra resolução:

f é fechado $\Rightarrow f$ é conservativo num pequeno disco contido no seu domínio (um disco é simplesmente conexo).

Tentemos calcular um potencial para f :

$$f = \nabla \phi \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial x} = f_1 = \frac{x}{x^2 + y^2} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = f_2 = \frac{y}{x^2 + y^2} \end{cases}$$

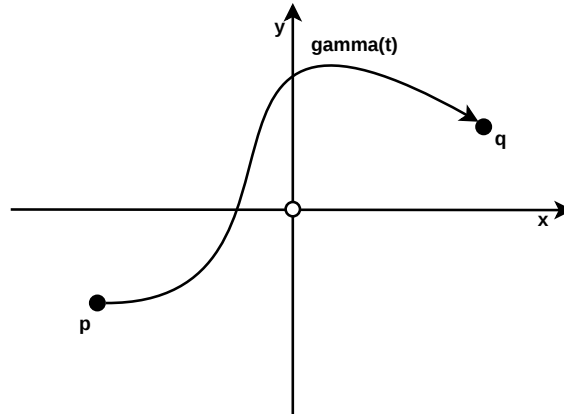
$$1^a \text{ equação: } \phi(x, y) = \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2) + a(y).$$

Substituindo na 2ª equação:

$$\frac{y}{x^2 + y^2} + a'(y) = \frac{y}{x^2 + y^2} \Rightarrow a'(y) = 0 \Rightarrow a(y) = \text{constante}$$

Podemos tomar $a(y)$ a zero.

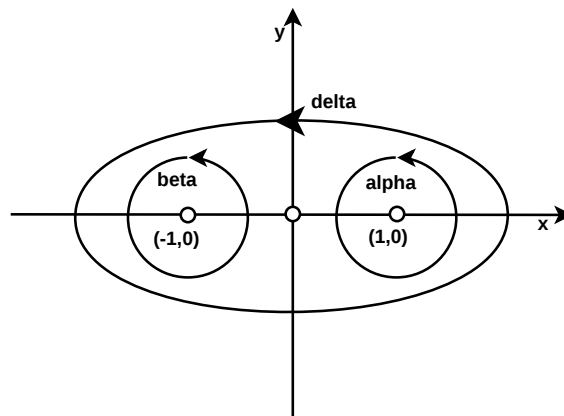
$\phi(x, y) = \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2)$ é de classe C^1 em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \Rightarrow f$ é conservativo no seu domínio.



$$\int f d\gamma = \phi(q) - \phi(p)$$

■

Exemplo 41.2. $f(x, y) \left(\frac{-3y}{(x-1)^2 + y^2} + \frac{3y}{(x+1)^2 + y^2}, \frac{3(x-1)}{(x-1)^2 + y^2} - \frac{3(x+1)}{(x+1)^2 + y^2} \right)$
em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(-1, 0), (1, 0)\}$



$$f = h + g$$

$$h(x, y) = \left(\frac{-3y}{(x-1)^2 + y^2}, \frac{3(x-1)}{(x-1)^2 + y^2} \right)$$

$$g(x, y) = \left(\frac{3y}{(x+1)^2 + y^2}, \frac{-3(x+1)}{(x+1)^2 + y^2} \right)$$

h = “Ralo da banheira” $\times 3$ (centrado em $(1,0)$).

g = “Ralo da banheira” $\times (-3)$ (centrado em $(-1,0)$).

h, g fechados $\Rightarrow f$ fechado.

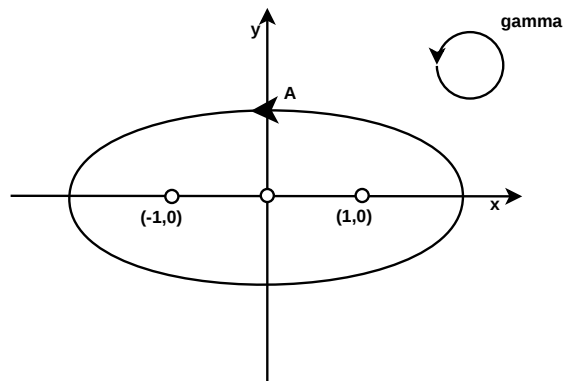
$$\oint f d\alpha = \underbrace{\oint h d\alpha}_{=+6\pi \text{ (porque } h=3 \times \text{ralo da banheira)}} + \underbrace{\oint g d\alpha}_{=0 \text{ (porque } \alpha \sim 1 \text{ ponto, em } D_g)} = +6\pi + 0 = +6\pi$$

$$\oint f d\beta = \underbrace{\oint h d\beta}_{=0 \text{ (porque } \alpha \sim 1 \text{ ponto, em } D_h)} + \underbrace{\oint g d\beta}_{=-6\pi \text{ (porque } g=-3 \times \text{ralo da banheira)}} = 0 - 6\pi = -6\pi$$

$$\oint f d\delta = \oint h d\delta + \oint g d\delta = \underbrace{\oint h d\alpha}_{=+6\pi} + \underbrace{\oint g d\beta}_{=-6\pi} = 0$$

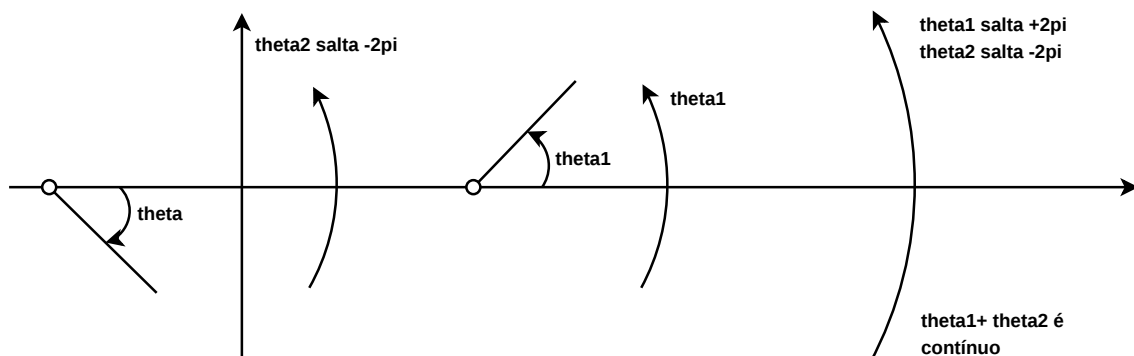
f é conservativo no seu domínio? **Não!** Por exemplo: $\oint f d\alpha = +6\pi \neq 0$.

Em $\mathbb{R}^2 \setminus \{\text{segmento de reta que liga } (-1, 0) \text{ a } (1, 0)\}$ f é conservativo.



$$\oint f d\gamma = 0 \quad (\gamma \sim 1 \text{ ponto})$$

$$\oint f dA = 0$$



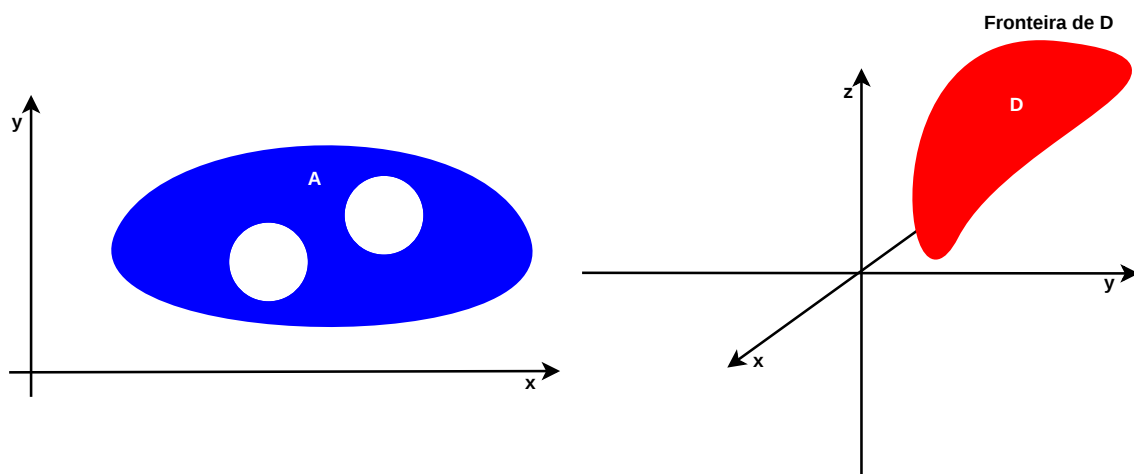


42 Aula de 14 de maio de 2014

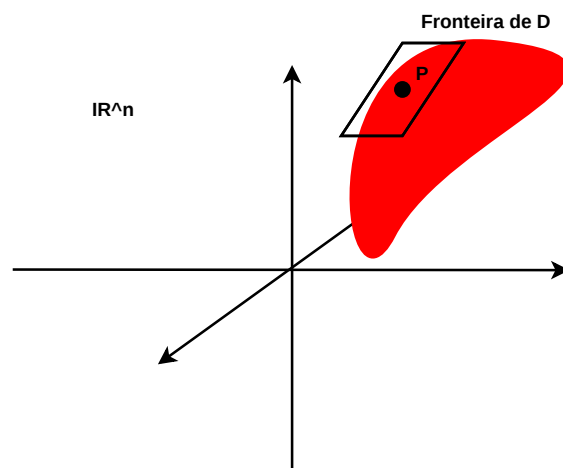
Teorema da divergência

Definição 42.1. $D \subset \mathbb{R}^n$ aberto. D diz-se um domínio regular se é uma região simples limitada por uma variedade $-(n-1)$ compacta, ∂D . ■

Exemplo 42.1.1.

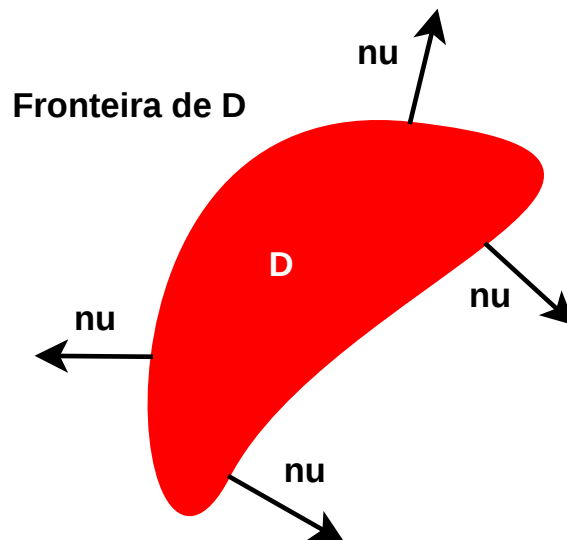


$D \subset \mathbb{R}^n$ domínio regular.



Em cada $P \in \partial D$, com ∂D variedade $-(n-1)$ compacta, $\dim T_P \partial D^\perp = 1$.

Em $T_P \partial D^\perp$ existem dois vetores unitários. O que aponta para fora de D chama-se normal exterior unitária a ∂D em P e designa-se por $\nu(P)$ ou $n_{ext}(P)$.



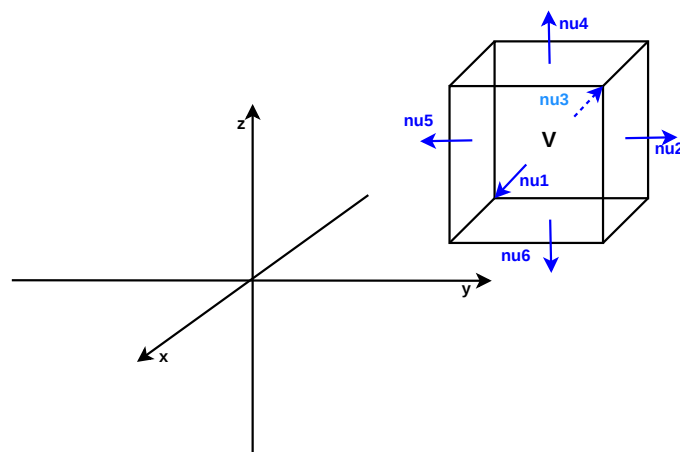
Como ∂D é uma variedade $-(n-1)$ o campo de normais exteriores unitárias $\nu : \partial D \rightarrow \mathbb{R}^n$ é contínuo.

Definição 42.2. $S \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $f : S \rightarrow \mathbb{R}^n$ campo vetorial de classe C^1 . A divergência de f é o campo escalar $\text{div}(f) : S \rightarrow \mathbb{R}$ com

$$\text{div}(f) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$$

, onde $f = (f_1, \dots, f_n)$. Outra notação utilizada é $\nabla \cdot f$. ■

$n = 3, \mathbb{R}^3, f = (f_1, f_2, f_3)$ classe C^1 .



$$V : \begin{cases} x_0 \leq x \leq x_1 \\ y_0 \leq y \leq y_1 \\ z_0 \leq z \leq z_1 \end{cases}$$

$$\nu_1 = (1, 0, 0) \quad \nu_2 = (0, 1, 0) \quad \nu_3 = (-1, 0, 0)$$

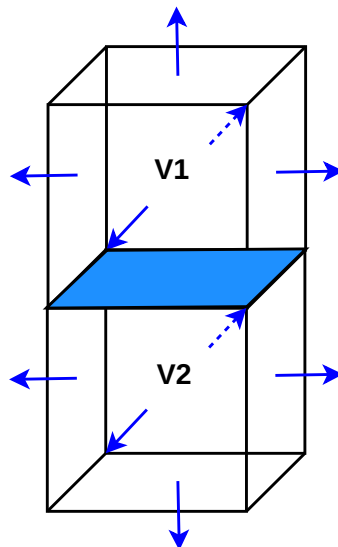
$$\nu_4 = (0, 0, 1) \quad \nu_5 = (0, -1, 0) \quad \nu_6 = (0, 0, -1)$$

$$\begin{aligned} \int_V \operatorname{div}(f) &= \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{y_0}^{y_1} dy \int_{z_0}^{z_1} dz \left[\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} \right] = \\ &= \int_{y_0}^{y_1} dy \int_{z_0}^{z_1} [f_1(x_1, y, z) - f_1(x_0, y, z)] \\ &\quad + \int_{x_0}^{x_1} dy \int_{z_0}^{z_1} [f_2(x, y_1, z) - f_2(x, y_0, z)] \\ &\quad + \int_{x_0}^{x_1} dy \int_{y_0}^{y_1} [f_3(x, y, z_1) - f_3(x, y, z_0)] = \\ &= \int_{A_1} f \nu_1 + \int_{A_3} f \nu_3 + \int_{A_2} f \nu_2 + \int_{A_5} f \nu_5 + \int_{A_4} f \nu_4 + \int_{A_6} f \nu_6 = \\ &= \int_{\partial V} f \nu \end{aligned}$$

$$\iiint_V \operatorname{div}(f) = \iint_{\partial V} f \nu$$

■

O que acontece se juntarmos dois paralelepípedos?



$$V = V_1 \cup V_2$$

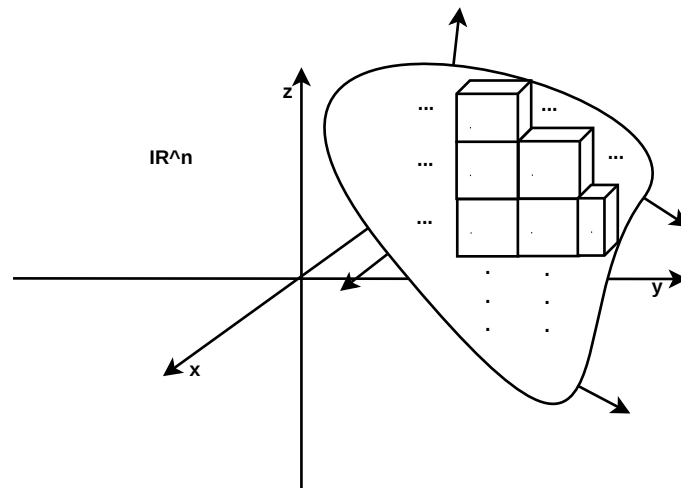
$$\int_V \operatorname{div}(f) = \int_{V_1} \operatorname{div}(f) + \int_{V_2} \operatorname{div}(f) = \int_{\partial V_1} f \nu + \int_{\partial V_2} f \nu = \int_{\partial V} f \nu$$

A contribuição da face interior anula-se.

O resultado é válido para paralelepípedos em $\mathbb{R}^n$.

O resultado é válido para regiões simultaneamente x_1 -simples, x_2 -simples, $\dots$, x_n -simples. (A região é x_j -simples se x_j varia entre os gráficos de duas funções de classe C^1 das restantes variáveis).

Numa região simples D (i.e. união finita de regiões simultaneamente x_1 -simples, $\dots$, x_n -simples):



As contribuições das hipersuperfícies internas anulam-se:

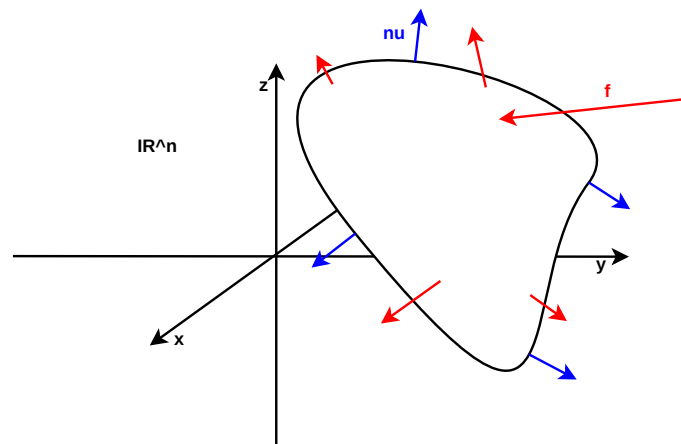
$$\int_D \operatorname{div}(f) = \int_{\partial D} f \cdot \nu$$

Teorema 42.1 (Divergência). $D \subset \mathbb{R}^n$ domínio regular.

$f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 , contínuo em $D \cup \partial D$.

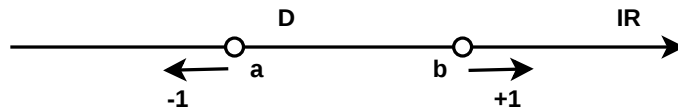
Então $\int_D \operatorname{div}(f) = \int_{\partial D} f \cdot \nu$, onde $\nu : \partial D \rightarrow \mathbb{R}^n$ é o campo de normais exteriores unitárias na variedade $(n-1)$ - ∂D . ■

$\int_{\partial D} f \cdot \nu$ chama-se fluxo de f através de ∂D no sentido da normal ν .



O fluxo é uma medida do quanto f aponta na direção e sentido de ν .

Exemplo 42.1.1. $n = 1$, o Teorema 42.1 (Divergência) é o Teorema fundamental do cálculo:



$$\partial D = \{a, b\} \quad (\text{var} = 0)$$

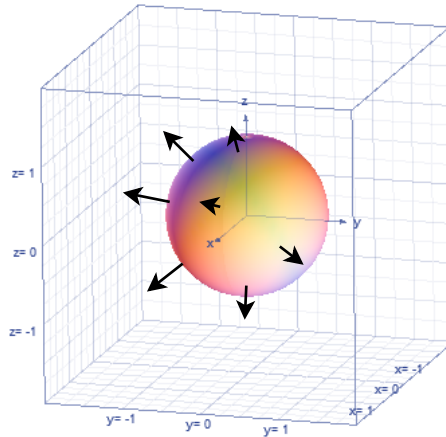
$$\text{“} \int_D \text{div} f = \int_a^b \frac{df}{dx} dx = \int_{\partial D} f \nu = +1f(b) - 1f(a) = f(b) - f(a)\text{”}$$

■

43 Aula de 15 de maio de 2014

Exemplo 43.1. D bola $x^2 + y^2 + z^2 < R^2$ em $\mathbb{R}^3$, $R > 0$.

$$f(x, y, z) = (x, y, z)$$



∂D é a superfície esférica de raio R .

$$\operatorname{div}(f) = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$$

$$\int_D \operatorname{div}(f) = \int_D 3 = 3 \times \operatorname{Vol}(D) = 4\pi R^3$$

$$\nu(x, y, z) = \frac{1}{R}(x, y, z) \text{ em } \partial D$$

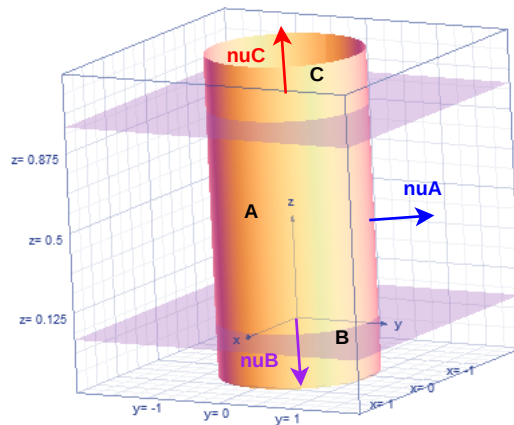
$$f \cdot \nu = (x, y, z) \cdot (x, y, z) \frac{1}{R} = R \text{ em } \partial D$$

$$\int_{\partial D} f \cdot \nu = \int_{\partial D} R = R \times \operatorname{Area}(\partial D) = 4\pi R^3$$

■

Exemplo 43.2. $D : \begin{cases} x^2 + y^2 < 1 \\ 0 < z < 1 \end{cases}$

$$f(x, y, z) = (x^3, y^3, z)$$



$$\begin{aligned}\partial D &= A \cup B \cup C \\ \int_D \operatorname{div}(f) &= \int_{\partial D} f \cdot \nu = \int_A f \cdot \nu_A + \int_B f \cdot \nu_B + \int_C f \cdot \nu_C \\ \operatorname{div}(f) &= 3x^2 + 3y^2 + 1 \\ \int_D \operatorname{div}(f) &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^1 (1 + 3\rho^2) \rho dz d\rho d\theta = \frac{5}{2}\pi\end{aligned}$$

B: $\nu_B = (0, 0, -1)$

$$f \cdot \nu_B = -z = 0 \text{ em } B \Rightarrow \int f \cdot \nu_B = 0$$

C: $\nu_C = (0, 0, 1)$

$$f \cdot \nu_C = z = 1 \text{ em } C \Rightarrow \int_C f \cdot \nu_C = \int_C 1 = \operatorname{Area}(C) = \pi$$

A: $g(\theta, z) = (\cos(\theta), \sin(\theta), z)$ $\theta \in]0, 2\pi[, z \in]0, 1[$

$$Dg(\theta, z) = \begin{bmatrix} | & | \\ \frac{\partial g}{\partial \theta} & \frac{\partial g}{\partial z} \\ | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin(\theta) & 0 \\ \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\frac{\partial g}{\partial \theta}$ e $\frac{\partial g}{\partial z}$ são tangentes ao cilindro, logo:

$$\frac{\partial g}{\partial \theta} \times \frac{\partial g}{\partial z} = \det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (\cos(\theta), \sin(\theta), 0)$$

$\Rightarrow$ o sinal a considerar é o +.

$$\Rightarrow \nu_A = \frac{(\cos(\theta), \sin(\theta), 0)}{\left\| \frac{\partial g}{\partial \theta} \times \frac{\partial g}{\partial z} \right\|}$$

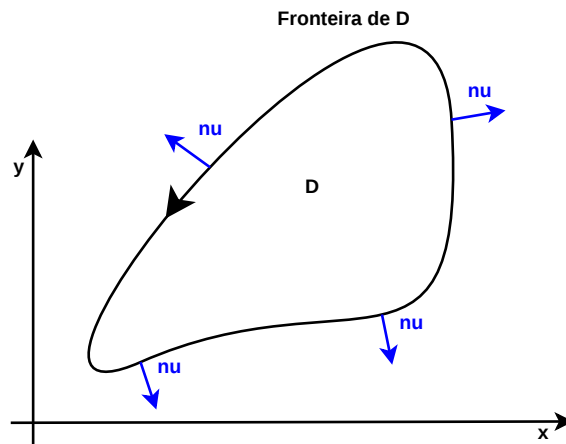
$$\sqrt{\det(Dg^T Dg)} \underbrace{=}_{\text{superfície em } \mathbb{R}^3} \left\| \frac{\partial g}{\partial \theta} \times \frac{\partial g}{\partial z} \right\|$$

$$\begin{aligned} \int_A f \cdot \nu_A &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (\cos^3(\theta), \sin^3(\theta), z) \cdot \frac{(\cos(\theta), \sin(\theta), 0)}{\left\| \frac{\partial g}{\partial \theta} \times \frac{\partial g}{\partial z} \right\|} \left\| \frac{\partial g}{\partial \theta} \times \frac{\partial g}{\partial z} \right\| d\theta dz = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (\cos^4(\theta) + \sin^4(\theta)) dz d\theta = \dots = \frac{3}{2}\pi \end{aligned}$$

$$\underbrace{\int_D \operatorname{div}(f)}_{=\frac{5}{2}\pi} = \underbrace{\int_A f \cdot \nu_A}_{=\frac{3}{2}\pi} + \underbrace{\int_B f \cdot \nu_B}_{=0} + \underbrace{\int_C f \cdot \nu_C}_{=\pi}$$

■

Em $\mathbb{R}^2$, o Teorema da Divergência é equivalente ao Teorema de Green.



$$f = (f_1, f_2)$$

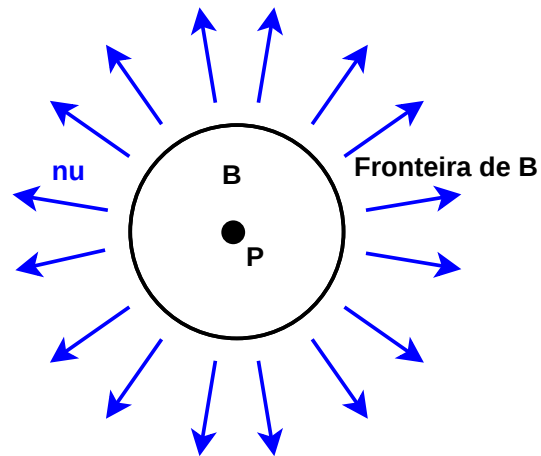
Seja $\tilde{f}$ o campo $(f_2, -f_1)$.

$$\iint_D \left[\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right] dx dy \oint_{\partial D} f = \iint_D \operatorname{div}(\tilde{f}) = \int_{\partial D} \tilde{f} \cdot \nu$$

$$f \perp \tilde{f} \quad \nu \perp \text{vetor velocidade.}$$

Aplicar o Teorema da divergência a $\tilde{f} \Leftrightarrow$ Aplicar o Teorema de Green a f .

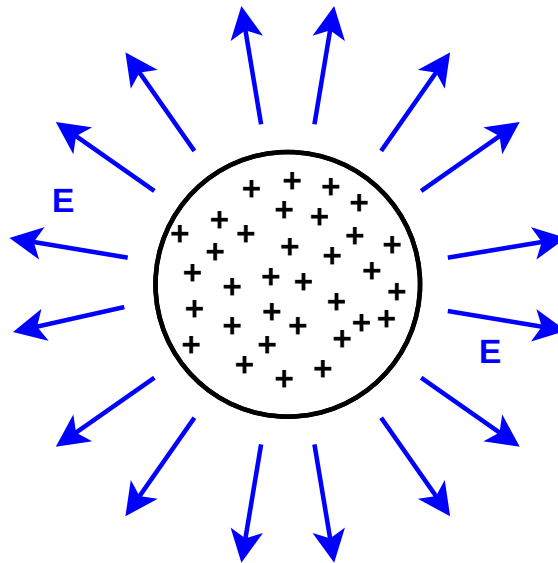
Significado geométrico/físico da divergência



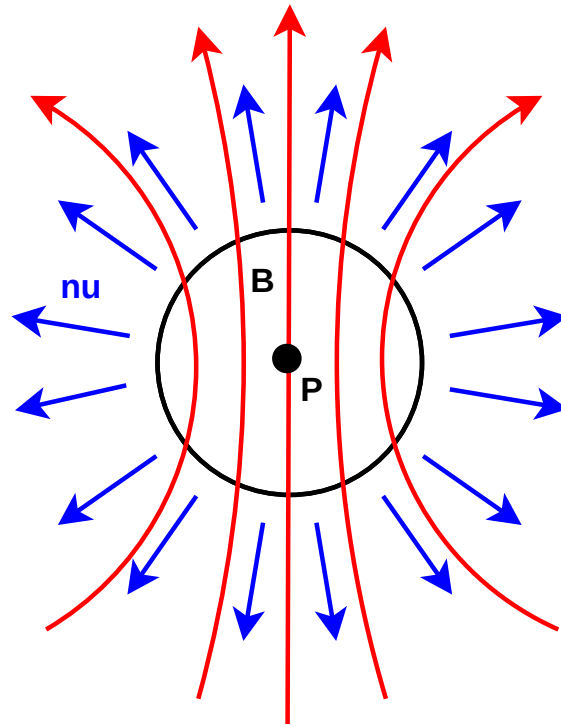
B é uma pequena bola centrada em P .

$$\operatorname{div}(f(P)) > 0 \rightsquigarrow \int_B \operatorname{div}(f) > 0 \Leftrightarrow \int_{\partial B} f \cdot \nu > 0$$

Exemplo 43.3.



Carga positiva $\rightsquigarrow \operatorname{div}(E) > 0$. Se $\operatorname{div}(f(P)) < 0$ então a força é centrípeta (aponta para o centro).



$$\operatorname{div}(f(P)) = 0$$

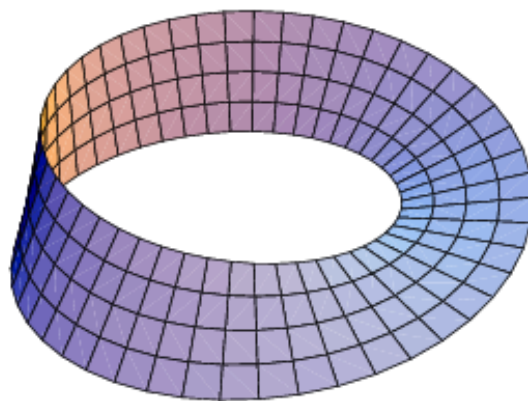
$$\int_B \operatorname{div}(f) \approx 0 \Leftrightarrow \int_{\partial B} f \cdot \nu \approx 0$$

■

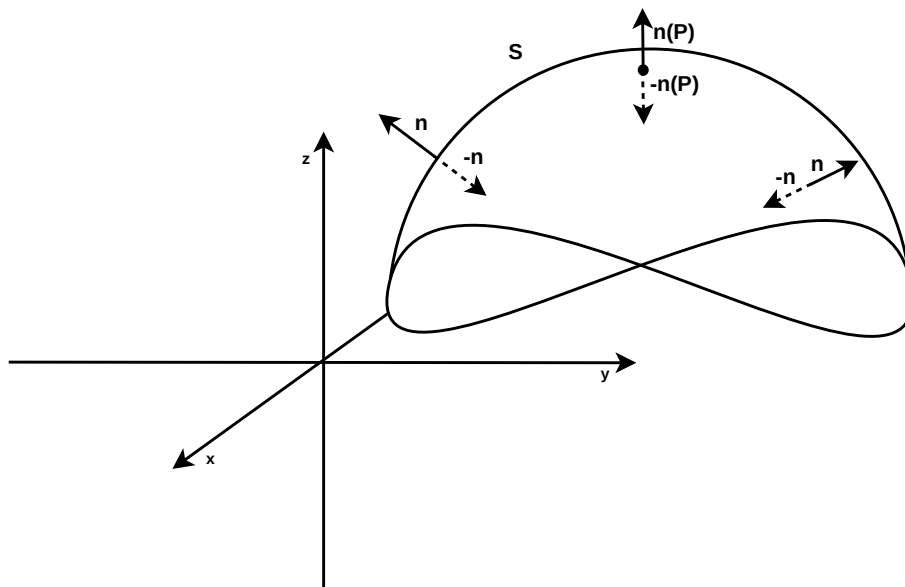
Teorema de Stokes

Definição 44.1. Uma variedade-2 (superfície) $S \subset \mathbb{R}^3$ diz-se orientável se existir uma campo vetorial contínuo $n : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ de normais unitárias. Diz-se que n define uma orientação de S .

Por exemplo, a fita de Möbius é uma superfície não orientável.

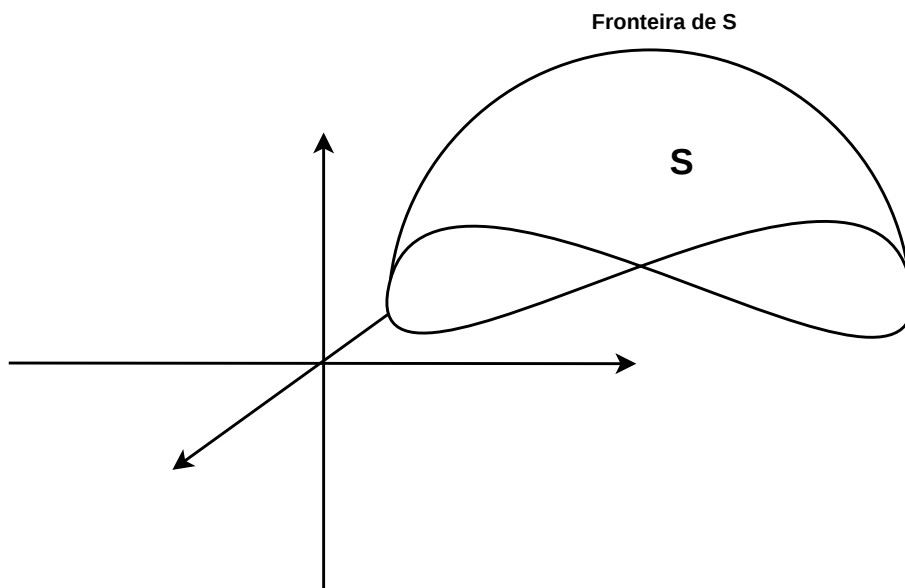


Por outro lado a superfície que se segue é orientável.

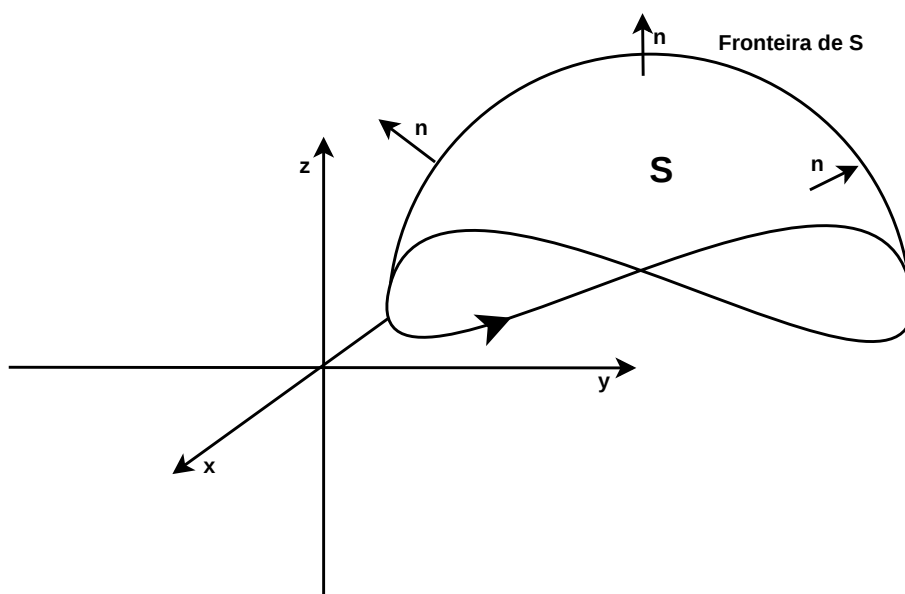


■

Se S é conexa e orientável em $\mathbb{R}^3$ e é limitada por uma curva fechada, essa curva chama-se bordo de S e designa-se por ∂S .

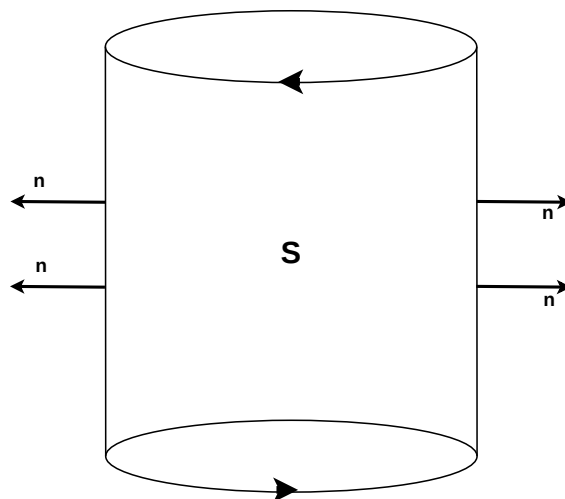


Se $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma superfície orientável com bordo ∂S , então a escolha de uma orientação n para S determina uma orientação, dita consistente, de ∂S , através da regra da mão direita.



“Uma formiga a caminhar sobre S , do lado definido por n , e ao longo de ∂S , deve ter S à sua esquerda.”

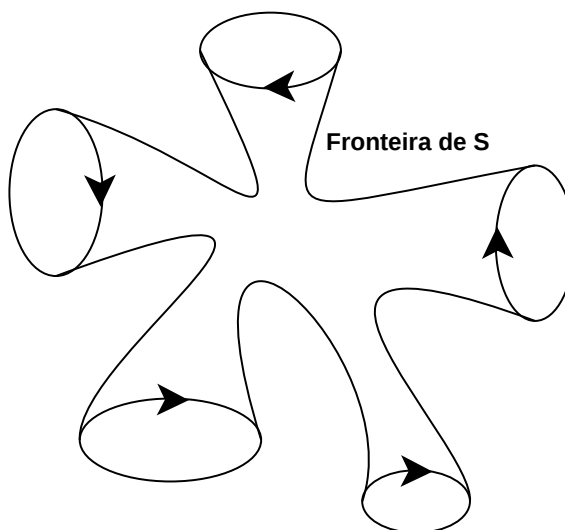
Exemplo 44.1.



$$\partial S = A \cup B$$

■

Exemplo 44.2.



■

$$f = (f_1, f_2, f_3)$$

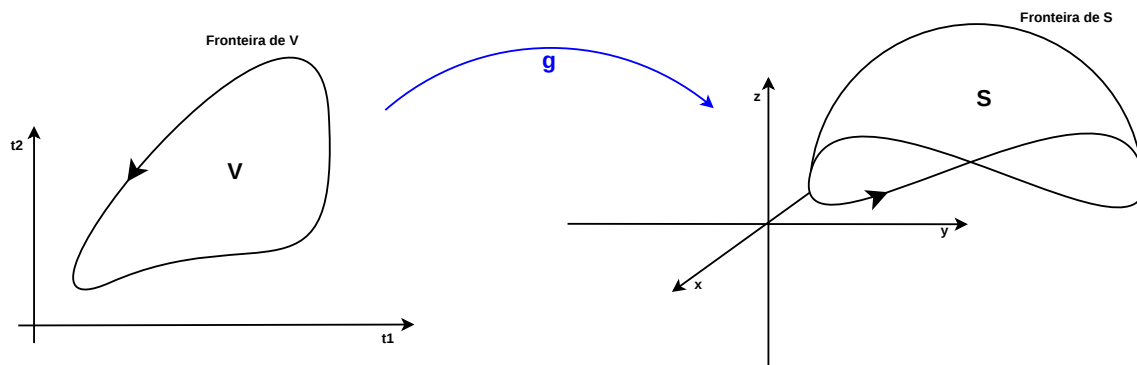
Definição 44.2. $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ campo vetorial de classe C^1 . Chama-se rotacional de f ao campo vetorial $rot(f) : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dado por:

$$\begin{aligned} rot(f) &= (\partial_2 f_3 - \partial_3 f_2, \partial_3 f_1 - \partial_1 f_3, \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1) = \\ &= \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

■

$rot(f) = 0 \Leftrightarrow f$ é fechado.
 Outra notação: $\nabla \times f$ para $rot(f)$.

Facto 44.1 (Exercício). $div(rot(f)) = 0$ ■



S é variedade-2 em $\mathbb{R}^3$.
 g é parametrização de S com $g(V) = S$.

$$g(\partial V) = \partial S$$

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

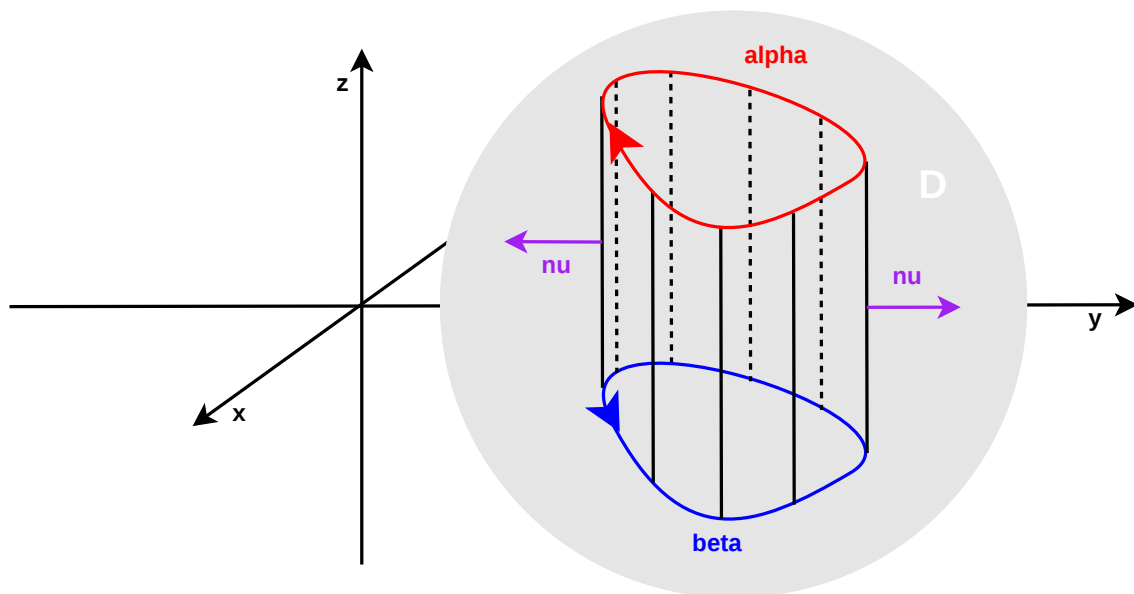
$$\int_S rot(f) \cdot n = \iint_V \left[\frac{\partial}{\partial t_1}(\dots) - \frac{\partial}{\partial t_2}(\dots) \right] dt_1 dt_2 \underbrace{=}_{T. Green} \oint_{\partial V} (\dots) = \oint_{\partial S} f$$

Teorema 44.1 (Stokes). $S \subset \mathbb{R}^3$ variedade-2, orientável, com bordo ∂S .

$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ de classe C^1 .

Então: $\int_S rot(f) \cdot n = \oint_{\partial S} f$, onde ∂S está orientado de forma consistente com a orientação n de S . ■

Exemplo 44.1.1. $D \subset \mathbb{R}^3$ aberto; $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$ classe C^1 , fechado $\Leftrightarrow rot(f) = 0$



Pelo Teorema 44.1 (Teorema de Stokes):

$$\int_S \text{rot}(f) \cdot n = 0 = \oint_{\partial S} f = - \oint f d\alpha + \oint f d\beta = 0 \Rightarrow \oint f d\alpha = \oint f d\beta \Leftarrow \alpha \sim \beta$$

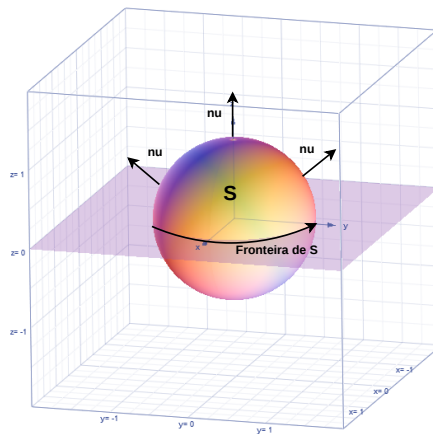
f fechado.

■

45 Aula de 19 de maio de 2014

Exemplo 45.1. S hemisfério norte da superfície esférica de raio 1, orientada com normal n com $n_z > 0$.

$$f(x, y, z) = (-y, x, z)$$



$$\int_S \text{rot}(f) \cdot n = \oint_{\partial S} f$$

∂S : $g(\theta) = (\cos(\theta), \sin(\theta), 0), \theta \in [0, 2\pi] \Rightarrow g'(\theta) = (-\sin(\theta), \cos(\theta), 0)$

$$\oint_{\partial S} f = \int_0^{2\pi} (-\sin(\theta), \cos(\theta), 0) \cdot (-\sin(\theta), \cos(\theta), 0) d\theta = \int_0^{2\pi} 1 d\theta = 2\pi$$

S : $\text{rot}(f) = (0, 0, 1 - (-1)) = (0, 0, 2)$

$$g(\theta, \phi) = (\cos \theta \sin \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \phi), \theta \in]0, 2\pi[, \phi \in]0, \frac{\pi}{2}[$$

$$Dg(\theta, \phi) = \begin{bmatrix} | & | \\ \frac{\partial g}{\partial \theta} & \frac{\partial g}{\partial \phi} \\ | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \theta \sin \phi & \cos \theta \cos \phi \\ \cos \theta \sin \phi & \sin \theta \cos \phi \\ 0 & -\sin \phi \end{bmatrix}$$

$$n = \pm \frac{\frac{\partial g}{\partial \theta} \times \frac{\partial g}{\partial \phi}}{\left\| \frac{\partial g}{\partial \theta} \times \frac{\partial g}{\partial \phi} \right\|}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial \theta} \times \frac{\partial g}{\partial \phi} &= \det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -\sin \theta \sin \phi & \cos \theta \sin \phi & 0 \\ \cos \theta \cos \phi & \sin \theta \sin \phi & -\sin \phi \end{bmatrix} = \\
&= -(-\cos \theta^2 \phi, -\sin \theta \sin^2 \phi, \underbrace{-\sin \phi \cos \phi}_{<0}) \\
n &= \frac{(\cos \theta \sin^2 \phi, \sin \theta \sin^2 \phi, \sin \phi \cos \phi)}{\left\| \frac{\partial g}{\partial \theta} \times \frac{\partial g}{\partial \phi} \right\|}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_S \text{rot}(f) \cdot n &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (0, 0, 2) \frac{\star, \star, \sin \phi \cos \phi}{\left\| \frac{\partial g}{\partial \theta} \times \frac{\partial g}{\partial \phi} \right\|} \left\| \frac{\partial g}{\partial \theta} \times \frac{\partial g}{\partial \phi} \right\| d\phi d\theta = \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin \phi \cos \phi d\phi d\theta = \\
&= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\phi d\phi = \\
&= 2\pi
\end{aligned}$$

■

Potencial vetor

$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, classe C^1 .

Se $h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, classe C^2 com $\text{rot}(h) = f$, então h diz-se um potencial vetor para f .

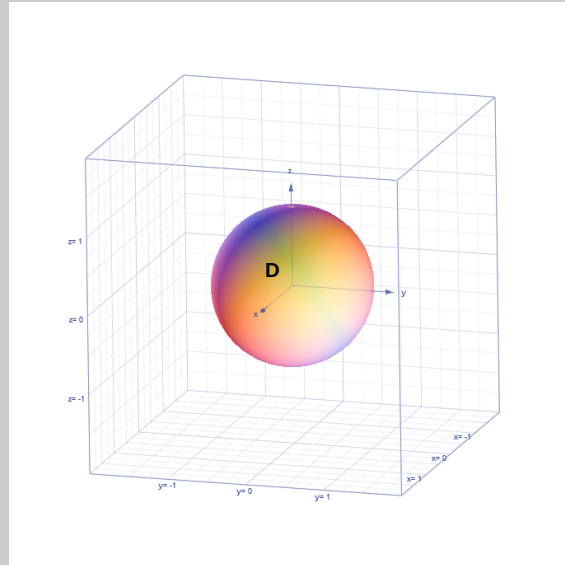
Como a $\text{div}(\text{rot}(f)) = 0$ é necessário que a divergência de f seja 0 para que exista um potencial vetor.

Teorema 45.1. $f : D \rightarrow \mathbb{R}^3$, classe C^1 , D aberto e conjunto em estrela se $\text{div}(f) = 0$ então $\exists h : D \rightarrow \mathbb{R}^3$.

$$\text{rot}(h) = f$$

■

Demonstração. Suponhamos que a origem é o centro de D .



$$h(x, y, z) = \int_0^1 f(tx, ty, tz) \times (t_x, t_y, t_z) dt$$

□

Se $\tilde{h}$ é outro potencial vetor para f , então $\text{rot}(\tilde{h} - h) = 0$ ou seja $\tilde{h} - h$ é fechado.

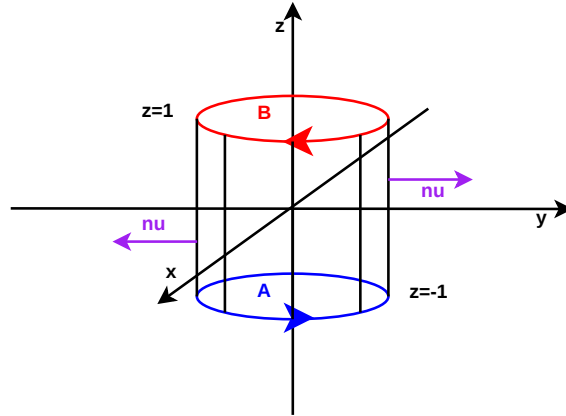
Por exemplo num conjunto em estrela $\tilde{h} = h + \nabla\phi$ para $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}$.

Em $\mathbb{R}^3$, é possível escolher ϕ de modo a garantir que $h_1 = 0$ ou $h_2 = 0$ ou $h_3 = 0$.

Exemplo 45.2. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ |z| < 1 \end{cases}$, orientada com normal n “exterior” ao cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

$$f(x, y, z) = (0, -z, -y^2)$$

Utilizando o Teorema 44.1 (de Stokes), calcule $\int_S f \cdot n$.



$\text{div}(f) = 0$; o domínio de f é $\mathbb{R}^3$ que é conjunto em estrela $\Rightarrow \exists h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, com $\text{rot}(h) = f$.

$$\int_S f \cdot n = \int_S \text{rot}(h) \cdot n = \oint_{\partial S} h = \oint_A h + \oint_B h$$

$$\text{rot}(h) = f \leftrightarrow \begin{cases} \partial_2 h_3 - \partial_3 h_2 = f_1 = 0 \\ \partial_3 h_1 - \partial_1 h_3 = f_2 = -z \\ \partial_1 h_2 - \partial_2 h_1 = f_3 = -y^2 \end{cases}, h_3 = 0$$

1ª equação: $\partial_3 h_2 = 0 \Rightarrow h_2 = a(x, y)$;

2ª equação: $\partial_3 h_1 = -z \Rightarrow h_1 = -\frac{z^2}{2} + b(x, y)$;

Substituindo na 3ª equação: $\partial_1 a - (0 + \partial_2 b) = y^2$, por exemplo $a = -xy^2, b = 0$.

$$h(x, y, z) = \left(-\frac{z^2}{2}, -xy^2, 0 \right)$$

A: $g(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta, -1), \theta \in [0, 2\pi] \Rightarrow g'(\theta) = (-\sin \theta, \cos \theta, 0)$.

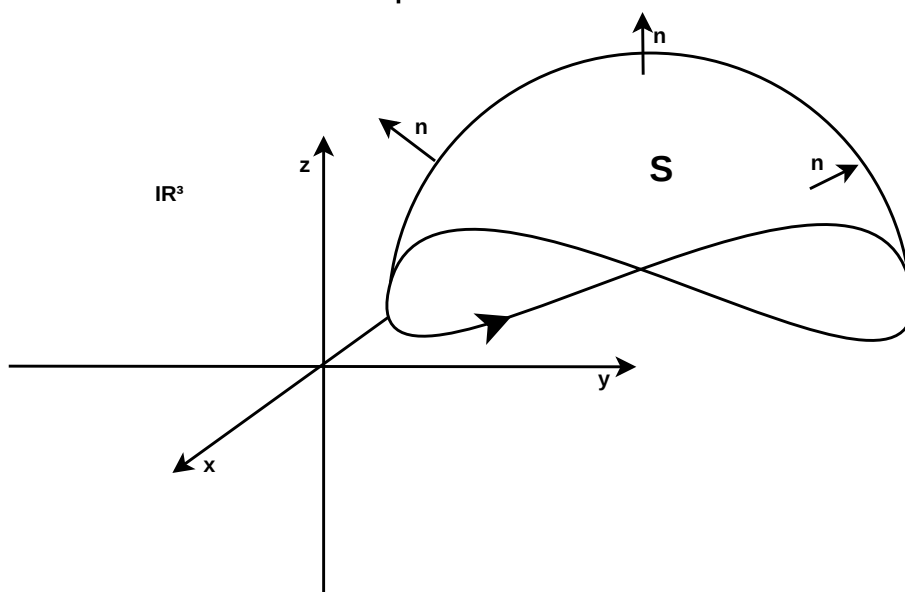
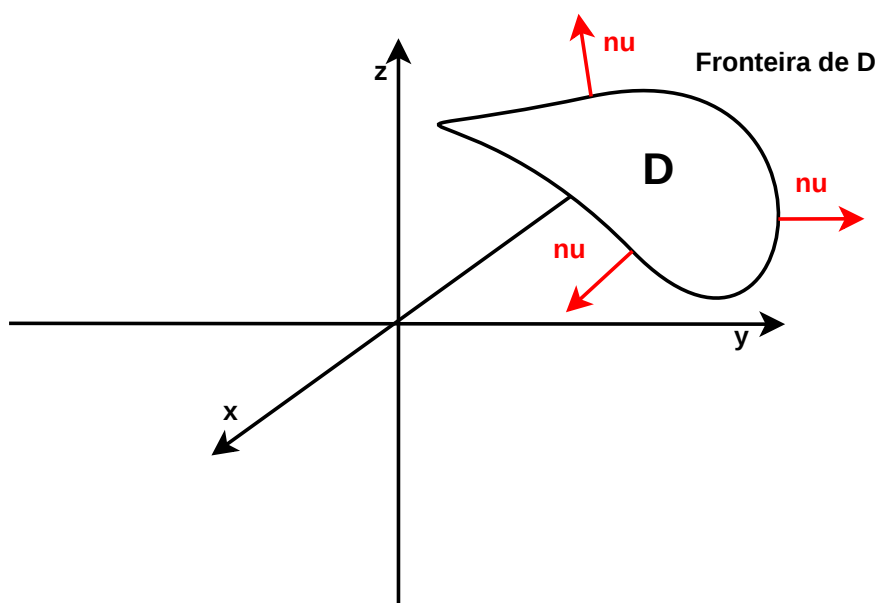
$$\int_A h = \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{2}, -\cos \theta \sin^2 \theta, 0 \right) \cdot (-\sin \theta, \cos \theta, 0) d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\frac{\sin \theta}{2} - \cos^2 \theta \sin^2 \theta \right] d\theta$$

B: $g(\theta) = (\cos \theta, -\sin \theta, +1), \theta \in [0, 2\pi] \Rightarrow g'(\theta) = (-\sin \theta, -\cos \theta, 0)$

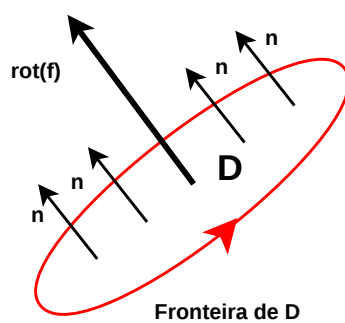
$$\begin{aligned} \oint_B h &= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{2}, -\cos \theta \sin^2 \theta, 0 \right) \cdot (-\sin \theta, -\cos \theta, 0) d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\sin \theta}{2} + \cos^2 \theta \sin^2 \theta \right) d\theta = \\ &= -\oint_A h \end{aligned}$$

$$\oint_S f \cdot n = \int_S \operatorname{rot}(h) \cdot n = \oint_{\partial S} h = \oint_A h + \oint_B h = 0$$

■



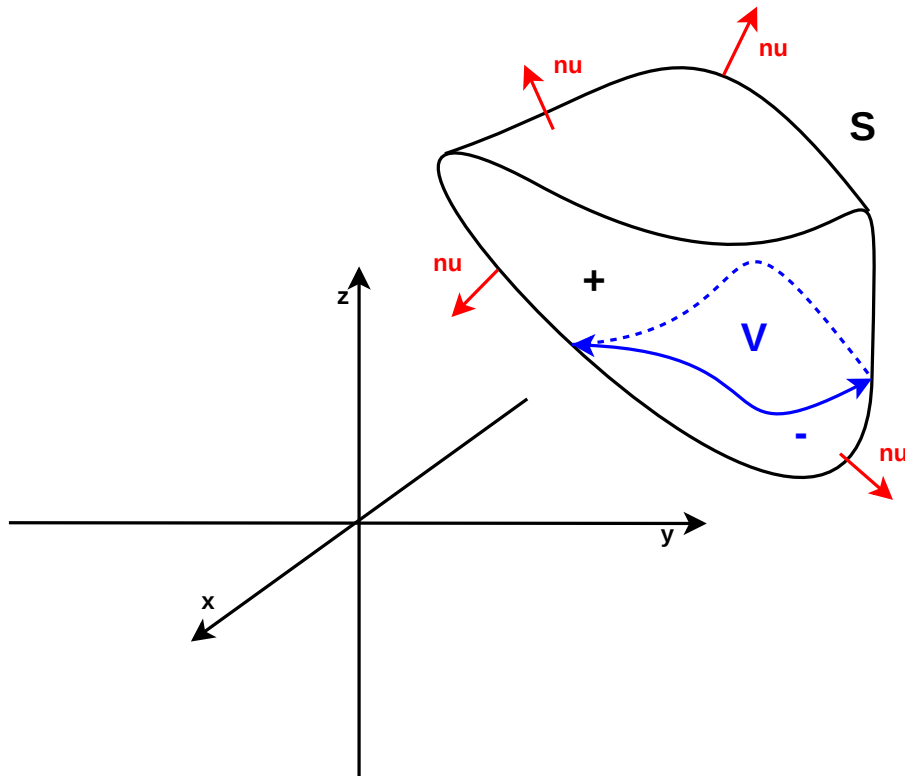
Interpretação física/geométrica do rotacional



$$\operatorname{rot}(f)(P) \neq 0 \rightsquigarrow \operatorname{rot}(f) \cdot n > 0 \Rightarrow \int_D \operatorname{rot}(f) \cdot n > 0 \Rightarrow \oint_{\partial D} f > 0$$

“ f tem circulação não nula ao longo de ∂D ”

Exemplo 46.1. $S \subset \mathbb{R}^3$ superfície fechada.



$$S = \partial V; f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\int_S \operatorname{rot}(f) \cdot n_{ext} = \int_V \operatorname{div}(\operatorname{rot}(f)) = 0 \text{ porque } \operatorname{div}(\operatorname{rot}(f)) = 0.$$

Ou seja, o fluxo de um rotacional através de uma superfície fechada em $\mathbb{R}^3$ é nulo.

Explicação com Teorema de Stokes:

$$S = S_+ \cup S_-, \partial S_+ = \partial S_- = \alpha$$

$$\int_S \operatorname{rot}(f) \cdot n_{ext} = \int_{S^+} \operatorname{rot}(f) \cdot n_{ext} + \int_{S^-} \operatorname{rot}(f) \cdot n_{ext} = \oint f d\alpha - \oint f d\alpha = 0$$

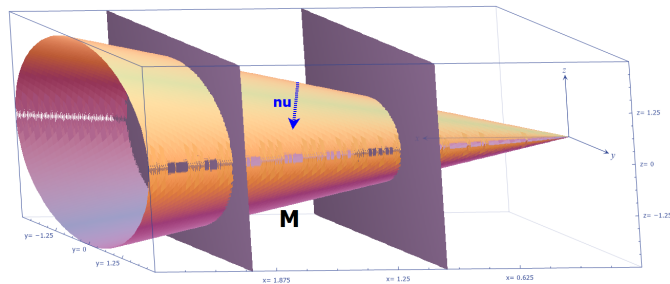
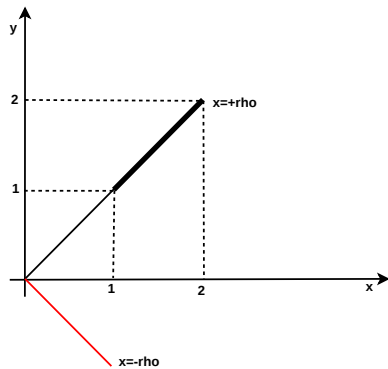
■

Exemplo 46.2. $M \subset \mathbb{R}^3$ superfície dada por $\begin{cases} x^2 = y^2 + z^2 \\ 1 < y^2 + z^2 < 4 \\ x > 0 \end{cases}$ orientada com

a normal unitária n com $n_1 > 0$.

Seja $f(x, y, z) = (2x, -y, -z)$. Calcule o fluxo de f através de M no sentido de n :

1. Pela definição;
2. Pelo teorema da divergência;
3. Pelo teorema de Stokes;
4. Calcule o fluxo de $\text{rot}(f)$ através de M no sentido de n .



1. Pela definição: $g(\rho, \theta) = (\rho, \rho \cos \theta, \rho \sin \theta), \theta \in]0, 2\pi[, \rho \in]1, 2[$

$$Dg(\rho, \theta) = \begin{bmatrix} | & | \\ \frac{\partial g}{\partial \rho} & \frac{\partial g}{\partial \theta} \\ | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{bmatrix}$$

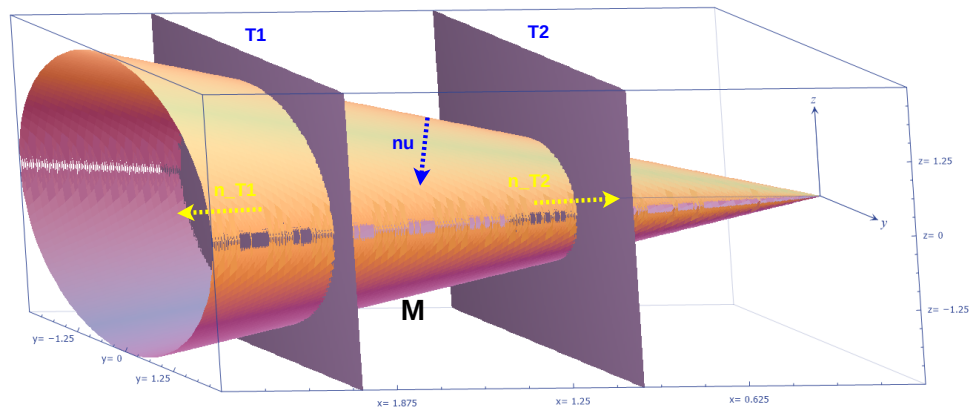
$$n = \pm \frac{\frac{\partial g}{\partial \rho} \times \frac{\partial g}{\partial \theta}}{\left\| \frac{\partial g}{\partial \rho} \times \frac{\partial g}{\partial \theta} \right\|}$$

$$\frac{\partial g}{\partial \rho} \times \frac{\partial g}{\partial \theta} = \det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\rho \sin \theta & \rho \cos \theta \end{bmatrix} = (\underbrace{\rho}_{>0 \Rightarrow +}, -\rho \cos \theta, -\rho \sin \theta)$$

$$n = \frac{(\rho, -\rho \cos \theta, -\rho \sin \theta)}{\left\| \frac{\partial g}{\partial \rho} \times \frac{\partial g}{\partial \theta} \right\|}$$

$$\begin{aligned}
\int_M f \cdot n &= \int_1^2 \int_0^{2\pi} (2\rho, -\rho \cos \theta, -\rho \sin \theta) \cdot \frac{(\rho, -\rho \cos \theta, -\rho \sin \theta)}{\left\| \frac{\partial g}{\partial \rho} \times \frac{\partial g}{\partial \theta} \right\|} \left\| \frac{\partial g}{\partial \rho} \times \frac{\partial g}{\partial \theta} \right\| d\theta d\rho = \\
&= \int_1^2 \int_0^{2\pi} 3\rho^3 d\theta d\rho = \\
&= 6\pi \int_1^2 \rho^2 d\rho = \\
&= 2\pi \rho^3 \Big|_{\rho=1}^{\rho=2} = \\
&= 14\pi
\end{aligned}$$

2. Pelo Teorema da divergência



$$\begin{aligned}
f(x, y, z) &= (2x, -y, -z) \\
\partial V &= M \cup T_1 \cup T_2 \\
\int_V \operatorname{div}(f) &= \int_{\partial V} f \cdot n_{ext} = - \int_M f \cdot n + \int_{T_1} f \cdot n_{T_1} + \int_{T_2} f \cdot n_{T_2} \\
\operatorname{div}(f) &= 2 - 1 - 1 = 0 \rightsquigarrow \int_V \operatorname{div}(f) = 0
\end{aligned}$$

$$\underline{T_1}: n_{T_1} = (1, 0, 0), f \cdot n_{T_1} = 2x = 4 \text{ em } T_1.$$

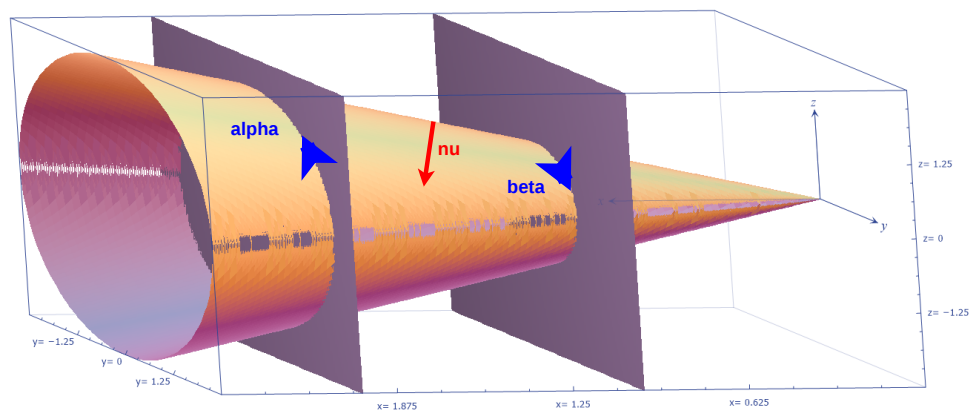
$$\int_{T_1} f \cdot n_{T_1} = \int_{T_1} 4 = 4 \times \operatorname{Area}(T_1) = 16\pi$$

T_2 : $n_{T_2} = (-1, 0, 0)$, $f \cdot n_{T_2} = -2x = -2$ em T_2 .

$$\int_{T_2} f \cdot n_{T_2} = \int_{T_2} (-2) = -2 \times \text{Area}(T_2) = -2\pi$$

$$\underbrace{\int_V \text{div}(f)}_{=0} = \int_{\partial V} f \cdot n_{ext} = - \int_M f \cdot n + \underbrace{\int_{T_1} f \cdot n_{T_1}}_{=16\pi} + \underbrace{\int_{T_2} f \cdot n_{T_2}}_{=-2\pi} = 14\pi$$

3. Pelo Teorema de Stokes



$$\partial M = \alpha \cup \beta$$

$$\text{div}(f) = 2 - 1 - 1 = 0$$

Domínio de f é $\mathbb{R}^3$ que é conjunto em estrela $\Rightarrow \exists$ potencial vetor h , $\text{rot}(h) = f$.

$$\int_M f \cdot n = \int_M \text{rot}(h) \cdot n = \oint_{\partial M} h = \oint h d\alpha + \oint h d\beta$$

$$\text{rot}(h) = f \longrightarrow \begin{cases} \partial_2 h_3 - \partial_3 h_2 = f_1 = 2x \\ \underbrace{\partial_3 h_1 - \partial_1 h_3}_{=0} = f_2 = -y, \quad h_1 = 0 \\ \partial_1 h_2 - \underbrace{\partial_2 h_1}_{=0} = f_3 = -z \end{cases}$$

2ª equação: $-\partial_1 h_3 = -y \Rightarrow h_3 = xy + a(y, z)$

3ª equação: $\partial_1 h_2 = -z \Rightarrow h_2 = -zx + b(y, z)$

Substituindo na 1ª equação:

$$(x + \partial_2 a) - (-x + \partial_3 b) = 2x \Leftrightarrow 2x + \partial_2 a - \partial_3 b = 2x \Leftrightarrow \partial_2 a - \partial_3 b = 0$$

Podemos tomar $a = b = 0$.

$$h(x, y, z) = (0, -zx, xy)$$

$$\underline{\alpha}: \alpha(\theta) = (2, 2 \cos \theta, 2 \sin \theta), \theta \in [0, 2\pi] \Rightarrow \alpha'(\theta) = (0, -2 \sin \theta, 2 \cos \theta)$$

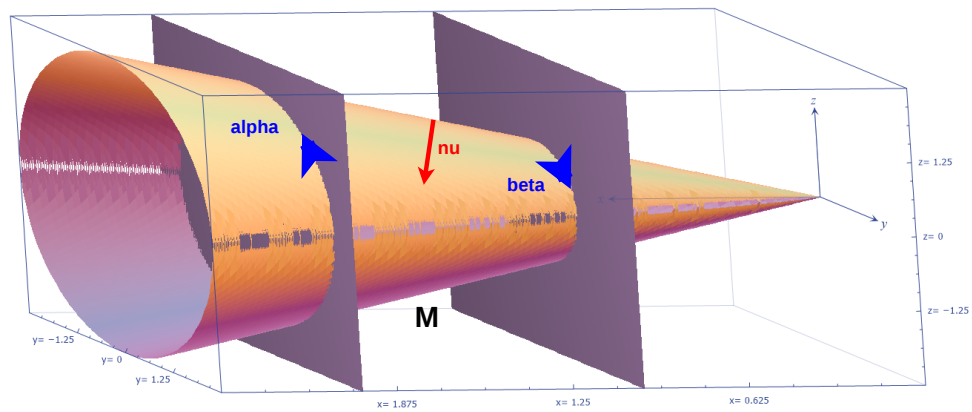
$$\oint h d\alpha = \int_0^{2\pi} (0, -4 \sin \theta, 4 \cos \theta) \cdot (0, -2 \sin \theta, 2 \cos \theta) d\theta = \int_0^{2\pi} 8 d\theta = 16\pi$$

$$\underline{\beta}: \beta(\theta) = (1, \cos \theta, -\sin \theta), \theta \in [0, 2\pi] \Rightarrow \beta'(\theta) = (0, -\sin \theta, -\cos \theta)$$

$$\oint h d\beta = \int_0^{2\pi} (0, \sin \theta, \cos \theta) \cdot (0, -\sin \theta, -\cos \theta) d\theta = \int_0^{2\pi} (-1) d\theta = -2\pi$$

$$\int_M f \cdot n = \int_M \text{rot}(h) \cdot n = \oint_{\partial M} h = \oint h d\alpha + \oint h d\beta = 16\pi - 2\pi = 14\pi$$

4. Calcule o fluxo de $\text{rot}(f)$ através de M no sentido de n .



$$\partial M = \alpha \cup \beta$$

$$\int_M \text{rot}(f) \cdot n = \oint f d\alpha + \oint f d\beta = \oint_{\partial M} f = 0$$

(Uma vez que $\text{rot} f = 0$, ou demonstrando que $f \perp \alpha$ e $f \perp \beta$)

■

47 Aula de 22 de maio de 2014

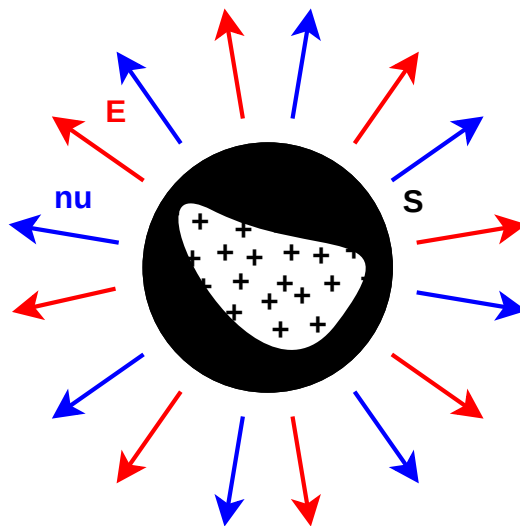
Equações de Maxwell (1831-1879)

As constantes não são tomadas em consideração nos seguintes exemplos!

$$(\pi = c = \varepsilon_0 = 1)$$

$$\begin{cases} \operatorname{div}(E) = \rho & (1) \\ \operatorname{div}(B) = 0 & (2) \\ \operatorname{rot}(B) = J + \frac{\partial E}{\partial t} & (3) \\ \operatorname{rot}(E) + \frac{\partial B}{\partial t} = 0 & (4) \end{cases}$$

1. Lei de Gauss:

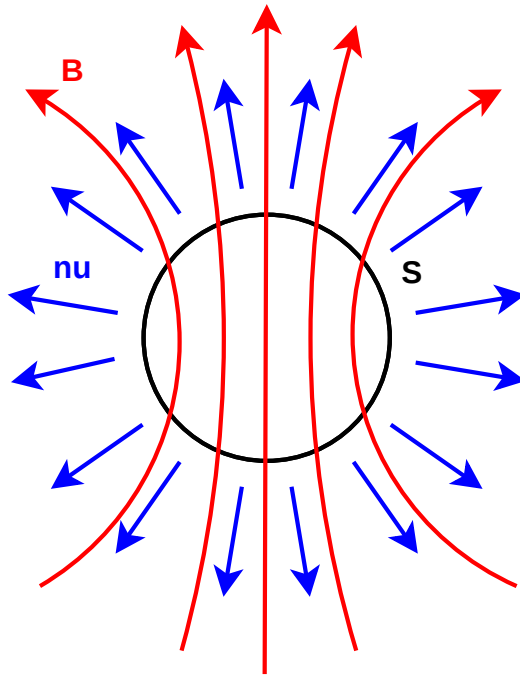


$$\partial V = S$$

$$\int_V \operatorname{div}(E) = \int_V \rho = Q(V) = \int_V E \cdot n_{ext}$$

, sendo $Q(V)$ a carga elétrica contida em V .

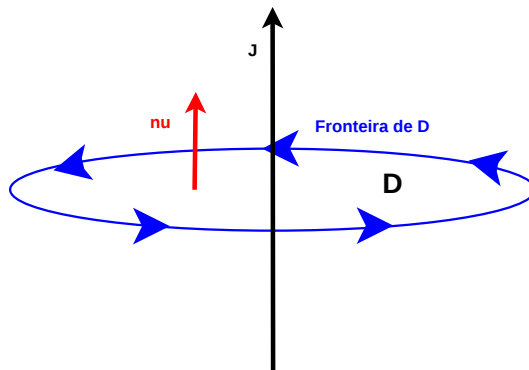
2. “Não existem cargas magnéticas”:



$$\partial V = S$$

$$\int_V \text{div}(B) = 0 \int_S B \cdot n$$

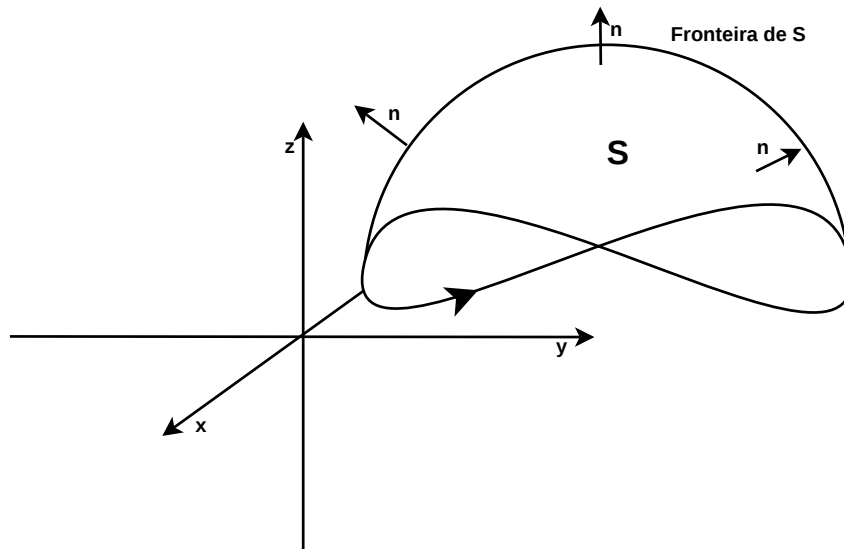
3. Lei de Ampère:



Tomemos $\frac{\partial E}{\partial t}$

$$\int_D J \cdot n = \int_D \text{rot}(B) \cdot n = \oint_{\partial D} B$$

4. Lei de Faraday:



$$\frac{\partial}{\partial t} \int_S B \cdot n \underbrace{=}_{R. Leibniz} \int_S \frac{\partial B}{\partial t} \cdot n = - \int_S \text{rot}(E) \cdot n = - \oint_{\partial S} E$$

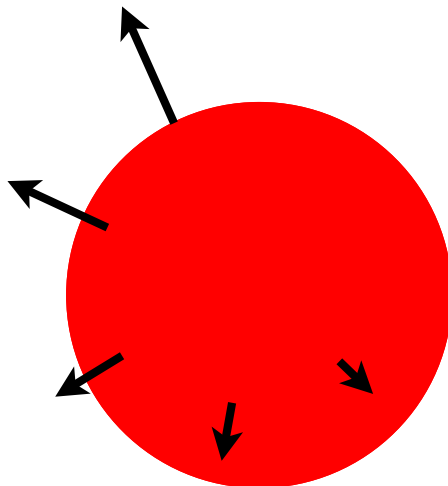
Conservação da carga elétrica

$$(3) \quad \text{rot}(B) = J + \underbrace{\frac{\partial E}{\partial t}}_{\text{termo de Maxwell}}$$

Apliquemos a divergência:

$$\text{div}(\text{rot}(B)) = 0 = \text{div}(J) + \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{(\text{div}(E))}_{=\rho}$$

$\text{div}(J) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ Equação da continuidade (conservação da carga).



$$\partial S = S$$

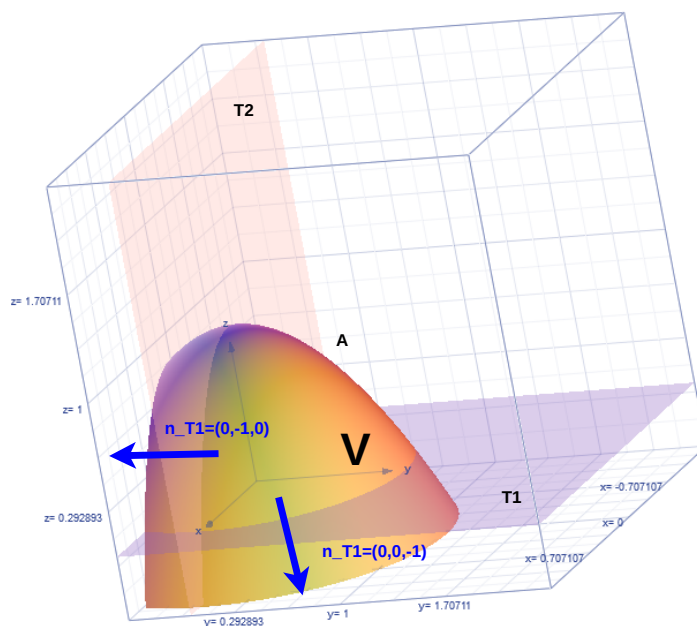
$$Q(t) = \text{carga elétrica em } V \text{ no instante } t = \int_V \rho(t)$$

$$\begin{aligned} \frac{dQ(t)}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho = \\ &= \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} = \\ &\underbrace{=}_{\text{conservacao da carga}} - \int_{\partial V} J \cdot n_{ext} = \\ &= \int_V (-div(J)) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \int_V \left[\frac{d}{dt} + div(J) \right] = 0, \forall volume(V) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + div(J) = 0 \end{aligned}$$

48 Aula de 23 de maio de 2014

Exemplo 48.1. $A : \begin{cases} z = 1 - x^2 - y^2 \\ z > 0 \\ y > 0 \end{cases}$, orientada com normal n com $n_z < 0$.
 $h(x, y, z) = (y^7 \cos y + x, 1 + y, 2z)$

Calcule $\int_A h \cdot n$.



$$\partial V = A \cup T_1 \cup T_2$$

$$\begin{aligned} \int_V \operatorname{div}(h) &= \int_{\partial V} h \cdot n_{\text{ext}} = \\ &= - \int_A h \cdot n + \int_{T_1} h \cdot n_{T_1} + \int_{T_2} h \cdot n_{T_2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \int_A h \cdot n = \int_{T_1} h \cdot n_{T_1} + \int_{T_2} h \cdot n_{T_2} - \int_V \operatorname{div}(h) \end{aligned}$$

$$\operatorname{div}(h) = 1 + 1 + 2 = 4$$

$$\int_V \operatorname{div}(h) = \int_V 4 = \int_0^\pi \int_0^1 \int_0^{1-\rho^2} 4\rho dz d\rho d\theta = \int_0^\pi \int_0^1 4(\rho - \rho^3) d\rho = 4\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = \pi$$

$$\underline{T_1}: h \cdot n_{T_1} = -2z = 0 \text{ em } T_1 \Rightarrow \int_{T_1} h \cdot n_{T_1} = 0$$

$$\underline{T_2}: h \cdot n_{T_2} = -(1+y) = -1 \text{ em } T_2 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \int_{T_2} h \cdot n_{T_2} &= \int_{T_2} (-1) = -\operatorname{Area}(T_2) = \\ &= - \int_{-1}^1 (1-x^2) dx = \\ &= -2 + \int_{-1}^1 x^2 dx = \\ &= -2 + \frac{2}{3} = \\ &= -\frac{4}{3} \end{aligned}$$

$$\therefore \int_A h \cdot n = \int_{T_1} h \cdot n_{T_1} + \int_{T_2} h \cdot n_{T_2} - \int_V \operatorname{div}(h) = 0 - \frac{4}{3} - \pi$$

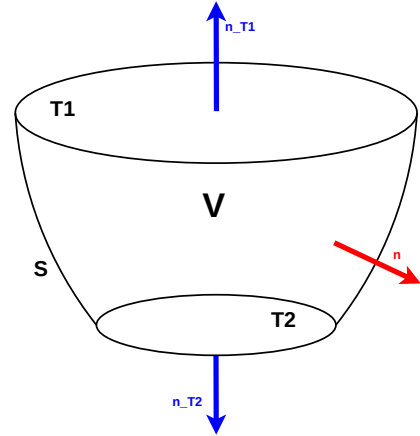
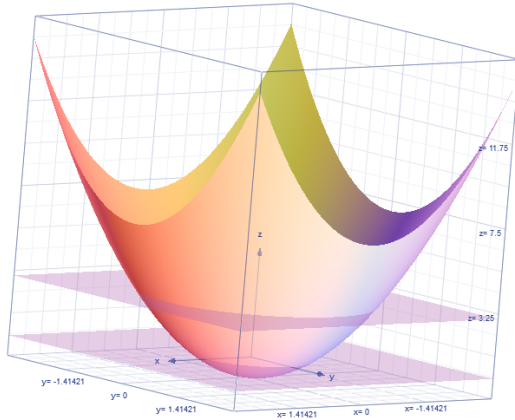
■

Exemplo 48.2. $S : 0 < z = x^2 + y^2 - 1 < 3$ orientada com a normal n com $n_z < 0$.

$$F(x, y, z) = (y, -x, \cos(x^2 + y^2))$$

Calcule $\int_S \operatorname{rot}(F) \cdot n$.

Com o Teorema da Divergência:



$$\partial V = S \cup T_1 \cup T_2$$

$$\begin{aligned} \underbrace{\int_S \operatorname{div}(\operatorname{rot}(F))}_{=0} &= \int_{\partial V} \operatorname{rot}(F) \cdot n_{\text{ext}} = \\ &= \int_S \operatorname{rot}(F) \cdot n + \underbrace{\int_{T_1} \operatorname{rot}(F) \cdot n_{T_1}}_{=-8\pi} + \underbrace{\int_{T_2} \operatorname{rot}(F) \cdot n_{T_2}}_{=2\pi} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \int_S \operatorname{rot}(F) \cdot n = \\ &= - \int_{T_1} \operatorname{rot}(F) \cdot n_{T_1} - \int_{T_2} \operatorname{rot}(F) \cdot n_{T_2} = \\ &= 8\pi - 2\pi = \\ &= 6\pi \end{aligned}$$

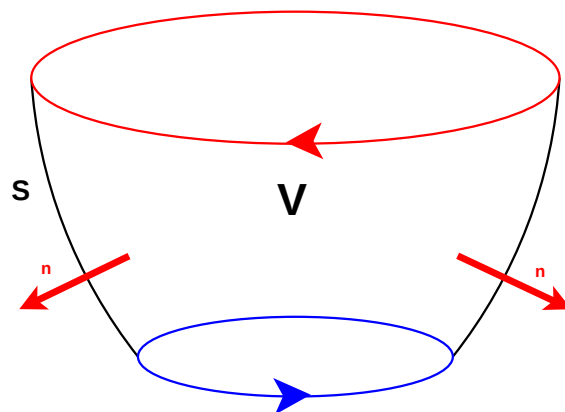
$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}(F)) = 0 \quad \int_V \operatorname{div}(\operatorname{rot}(F)) = 0$$

$$\operatorname{rot}(F) = (\star, \star, \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1) = (\star, \star, -2)$$

$$\int_{T_1} \operatorname{rot}(F) \cdot n_{T_1} = \int_{T_1} (-2) = -2 \times \operatorname{Area}(T_1) = -8\pi$$

$$\int_{T_2} \operatorname{rot}(F) \cdot n_{T_2} = \int_{T_2} (2) = 2 \times \operatorname{Area}(T_2) = 2\pi$$

com Teorema de Stokes:



$$\alpha : \begin{cases} \text{raio} = 3 \\ z = 3 \end{cases} \quad \beta : \begin{cases} \text{raio} = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\partial S = \alpha \cup \beta$$

$$\int_S \text{rot}(F) \cdot n = \oint_{\partial S} F = \oint F d\alpha + \oint F d\beta$$

$$\underline{\alpha}: \alpha(\theta) = (2 \cos \theta, -2 \sin \theta, 3), \theta \in [0, 2\pi] \Rightarrow \alpha'(\theta) = (-2 \sin \theta, -2 \cos \theta, 0)$$

$$\oint F d\alpha = \int_0^{2\pi} (-2 \sin \theta, -2 \cos \theta, \star) \cdot (-2 \sin \theta, -2 \cos \theta, 0) d\theta = \int_0^{2\pi} 4 d\theta = 8\pi$$

$$\underline{\beta}: \beta(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta, 0), \theta \in [0, 2\pi] \Rightarrow \beta'(\theta) = (-\sin \theta, \cos \theta, 0)$$

$$\oint F d\beta = \int_0^{2\pi} (\sin \theta, -\cos \theta, 0) \cdot (-\sin \theta, \cos \theta, 0) d\theta = \int_0^{2\pi} (-1) d\theta = -2\pi$$

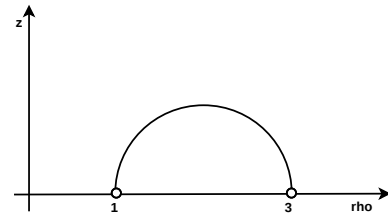
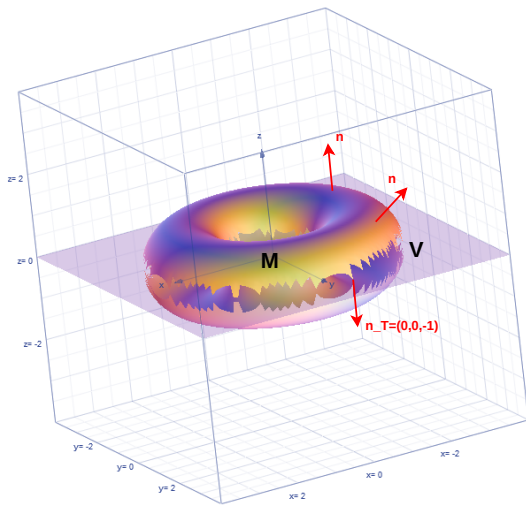
$$\int_S \text{rot}(F) \cdot n = \oint_{\partial S} F = \oint F d\alpha + \oint F d\beta = 8\pi - 2\pi = 6\pi$$

■

Exemplo 48.3. $M : \begin{cases} z^2 + (\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 = 1 \\ z > 0 \end{cases}$, orientada com a normal n com $n_z > 0$.

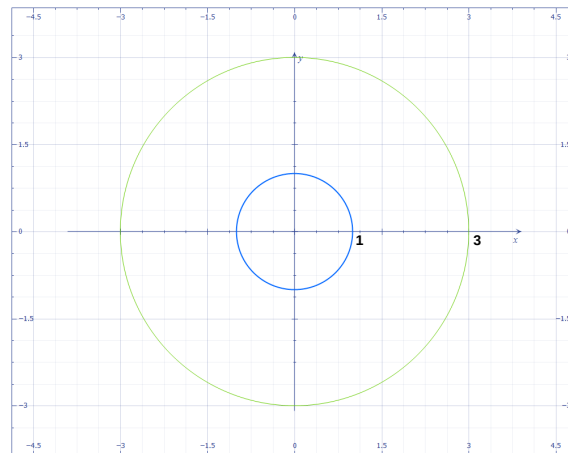
$$g(x, y, z) = (0, 0, 2)$$

Calcule $\int_M g \cdot n$.



$$z^2 + (\rho - 2)^2 = 1$$

com Teorema da divergência:



$$\partial V = M \cup T$$

$$\begin{aligned} \int_V \operatorname{div}(g) &= \int_{\partial V} g \cdot n_{\text{ext}} = \\ &= \int_M g \cdot n + \int_T g \cdot n_T \Rightarrow \\ \Rightarrow 0 &= \int_M g \cdot n - 16\pi \Rightarrow \\ \Rightarrow \int_M g \cdot n &= 16\pi \end{aligned}$$

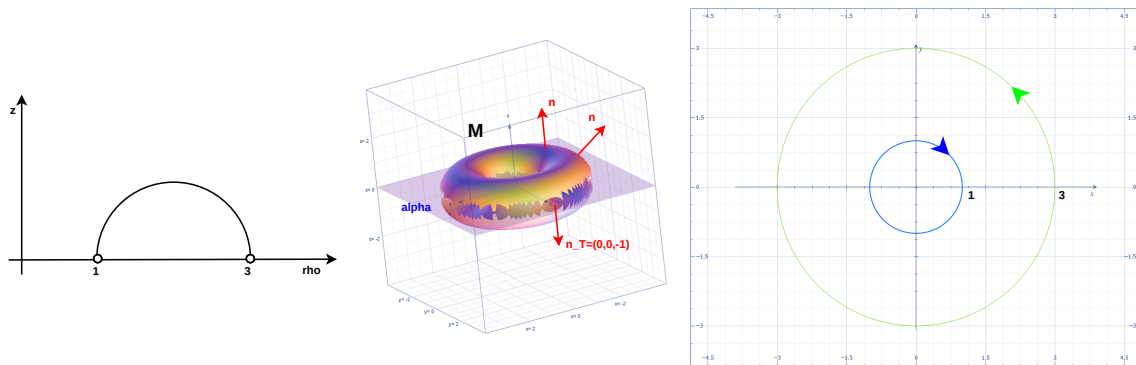
$$\operatorname{div}(g) = 0 \longrightarrow \int_V \operatorname{div}(g) = 0$$

$$n_T = (0, 0, -1); g \cdot n_T = 2$$

$$\int_T g \cdot n_T = \int_T (-2) = -2 \times \operatorname{Area}(T) = -2 \times (9\pi - \pi) = -16\pi$$

■

com Teorema de Stokes



$$\partial M = \alpha \cup \beta$$

$\operatorname{div}(g) = 0$, o domínio de g é $\mathbb{R}^3$ que é conjunto em estrela $\Rightarrow \exists$ potencial vetor h , com $\operatorname{rot}(h) = g$.

$$\int_M g \cdot n = \int_M \operatorname{rot}(h) \cdot n = \oint h d\alpha + \oint h d\beta$$

$$\operatorname{rot}(h) = g \longrightarrow \begin{cases} \partial_2 h_3 - \partial_3 h_2 = g_1 = 0 \\ \partial_3 h_1 - \partial_1 h_3 = g_2 = 0 \\ \partial_1 h_2 - \partial_2 h_1 = g_3 = 2 \end{cases}, h_3 = 0$$

1ª equação: $\partial_3 h_2 = 0 \rightsquigarrow h_2 = a(x, y)$

2ª equação: $\partial_3 h_1 = 0 \rightsquigarrow h_1 = b(x, y)$

Substituindo na 3ª equação: $\partial_1 a - \partial_2 b = 2 \rightsquigarrow \begin{cases} a = x \\ a = -y \end{cases}$

$$h(x, y, z) = (-y, x, 0)$$

$$\underline{\alpha}: \alpha(\theta) = (3 \cos \theta, 3 \sin \theta, 0), \theta \in [0, 2\pi] \Rightarrow \alpha'(\theta) = (-3 \sin \theta, 3 \cos \theta, 0)$$

$$\oint h d\alpha = \int_0^{2\pi} (-3 \sin \theta, 3 \cos \theta, 0) \cdot (-3 \sin \theta, 3 \cos \theta, 0) d\theta = \int_0^{2\pi} 9 d\theta = 18\pi$$

$$\underline{\beta}: \beta(\theta) = (\cos \theta, -\sin \theta, 0), \theta \in [0, 2\pi] \Rightarrow \beta'(\theta) = (-\sin \theta, -\cos \theta, 0)$$

$$\oint hd\beta = \int_0^{2\pi} (\sin \theta, \cos \theta, 0) \cdot (-\sin \theta, -\cos \theta, 0) d\theta = \int_0^{2\pi} (-1) d\theta = -2\pi$$

$$\oint hd\alpha + \oint hd\beta = 16\pi$$

49 Aula de 26 de maio de 2014

Exemplo 49.1. $g(t) = (\cos(t), \sin(t), \cos(2t)), t \in [0, 2\pi]$

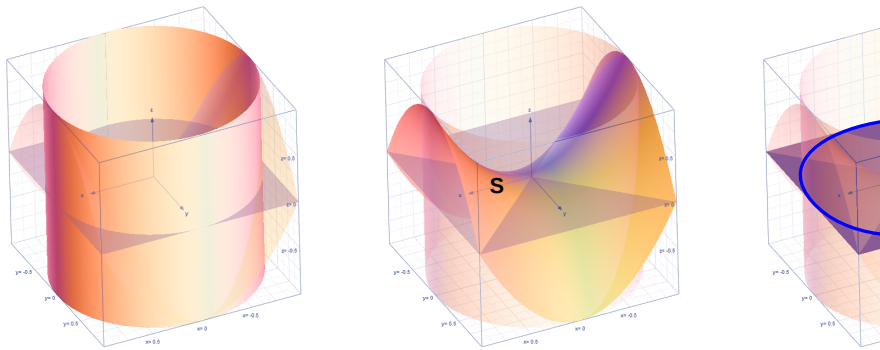
$$HG(x, y, z) = (x^2 - y, y^2 - x, y^2 - x^2 + z^3)$$

Utilizando o Teorema de Stokes, calcule $\oint Hdg$.

g parametriza a variedade $\perp C : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = x^2 - y^2 \end{cases}$.

Seja S a superfície dada por:

$$\begin{cases} z = x^2 - y^2 \\ x^2 + y^2 < 1 \end{cases}$$



Então $\partial S = C$.

$$\oint_{\partial S} H = \oint Hdg = \int_S \text{rot}(H) \cdot n$$

$$\text{rot}(H) = (\partial_2 H_3 - \partial_3 H_2, \partial_3 H_1 - \partial_1 H_3, \partial_1 H_2 - \partial_2 H_1) = (2y, 2x, 0)$$

Parametrização de S : $\alpha(R, \theta) = (R \cos \theta, R \sin \theta, \underbrace{R^2 \cos^2 \theta - R^2 \sin^2 \theta}_{R^2 \cos(2\theta)}), R \in]0, 1[, \theta \in$

$]0, 2\pi[$

$$D\alpha(R, \theta) = \begin{bmatrix} | & | \\ \frac{\partial \alpha}{\partial R} & \frac{\partial \alpha}{\partial \theta} \\ | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -R \sin \theta \\ \sin \theta & R \cos \theta \\ 2R \cos(2\theta) & -2R^2 \sin(2\theta) \end{bmatrix}$$

$$n = \pm \frac{\frac{\partial \alpha}{\partial R} \times \frac{\partial \alpha}{\partial \theta}}{\left\| \frac{\partial \alpha}{\partial R} \times \frac{\partial \alpha}{\partial \theta} \right\|}$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial R} \times \frac{\partial \alpha}{\partial \theta} = \det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \cos \theta & \sin \theta & 2R \cos(2\theta) \\ -R \sin \theta & R \cos \theta & -2R^2 \sin(2\theta) \end{bmatrix} =$$

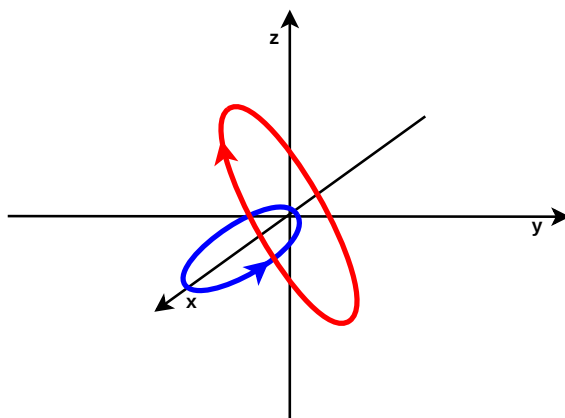
$$= (-2R^2 \sin \theta \sin(2\theta) - 2R^2 \cos \theta \cos(2\theta), 2R^2 \cos \theta \sin(2\theta) - 2R^2 \sin \theta \cos(2\theta), \overbrace{R}^{>0})$$

$$n = \frac{(-2R^2 \sin \theta \sin(2\theta) - 2R^2 \cos \theta \cos(2\theta), 2R^2 \cos \theta \sin(2\theta) - 2R^2 \sin \theta \cos(2\theta), \overbrace{R}^{>0})}{\left\| \frac{\partial \alpha}{\partial R} \times \frac{\partial \alpha}{\partial \theta} \right\|}$$

$$\int_S \text{rot}(H) \cdot n = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (2R \sin \theta, 2R \cos \theta, 0) \cdot n \left\| \frac{\partial \alpha}{\partial R} \times \frac{\partial \alpha}{\partial \theta} \right\| dR d\theta = 0$$

■

Exemplo 49.2. $H(x, y, z) = \left(\frac{z}{x^2 + z^2} + x, y, \frac{-x}{x^2 + z^2} + z \right)$



$$\begin{aligned} H &= f + g \\ f &= \left(\frac{z}{x^2 + z^2}, 0, \frac{-x}{x^2 + z^2} \right) \\ g &= (x, y, z) \end{aligned}$$

$f = (-1) \times$ ralo da banheira em $\mathbb{R}^3$ em torno do eixo dos yy .

$$g = \nabla \underbrace{\left(\frac{x^2}{2}, \frac{y^2}{2}, \frac{z^2}{2} \right)}_{\text{classe } C^1 \text{ em } \mathbb{R}^3}$$

$\Rightarrow g$ é conservativo em $\mathbb{R}^3$.

1. Calcule o trabalho de H ao longo da elipse definida por $2(x-1)^2 + \frac{y^2}{4} = 1, z = 0$, percorrida no sentido horário para um observador colocado no ponto $(1, 0, 100)$.

$$\oint_E H = \underbrace{\oint_E f}_{=0 \text{ porque } E \sim 1 \text{ ponto no domínio de } f} + \underbrace{\oint_E g}_{=0 \text{ porque } g \text{ é conservativo}} = 0 + 0 = 0$$

2. Calcule o trabalho de H ao longo da linha definida por $x^2 + z^2 = 2, y + z = 1$, percorrida num sentido à sua escolha.

$$\oint_C H = \oint_C f + \underbrace{\oint_C g}_{=0 \text{ porque } e \text{ conservativo}} = -2\pi + 0 = -2\pi$$

3. Será H um gradiente no seu domínio?

Resposta: Não! $\left(\oint_C H \neq 0 \right)$.

■